

Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren
und turbulenten Reibungsschicht.

Uebersicht:

Die zur Zeit vorhandenen, auf die Karmansche Integralbedingung des Impulses aufgebauten Verfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht werden zusammengestellt und durch neue, teils einfachere, teils allgemeinere Verfahren ergänzt.

Gliederung:

- I. Einleitung
- II. Die Berechnung der laminaren Reibungsschicht
 - 1.) Allgemeines
 - 2.) Das Verfahren von Pohlhausen
 - 3.) Das Verfahren von Holstein und Bohlen
 - 4.) Das Verfahren von Koschmieder und Walz
 - a) Neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil
 - b) Vereinfachte Lösung der Differentialgleichung
- III. Die Berechnung der turbulenten Reibungsschicht
 - 1.) Allgemeines
 - 2.) Das Verfahren von Buri
 - 3.) Das Verfahren von Gruschwitz
 - 4.) Das Verfahren von Kehl
 - 5.) Neue Verfahren
- IV. Anhang. Die Berechnung des Höchstauftriebsbeiwertes von Tragflügelprofilen
- V. Anhang. Die Berechnung des Profilwiderstandes
- VI. Zusammenfassung
- VII. Schrifttum

Der Bericht umfasst:

57 Seiten mit
33 Bildern.

Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen e.V.
Institut Windkanäle

Der Institutsleiter:

R. Seiferth
(R. Seiferth)

Bearbeiter:

A. Walz
(A. Walz)

gesehen:

Alb. Betz
(A. Betz)

Göttingen, den 27.12.1943.

Bericht Nr. 43/W/53

Deutsche
Forschungsanstalt
für Luft-
und Raumfahrt e. V.
Hist. Archiv
Bunsenstraße 10
3400 Göttingen

Berichtigung zu UM 3060 (W a l z).

Seite 10:

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gl. (24) muss heissen:

$$z_1^* \left(\frac{U_1}{U} \right)^b$$

Seite 11:

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gl. (24b) muss heissen:

$$\left(\frac{v^2}{v} \right)_1 \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^b$$

Auf den Kurvenblättern 10 bis 14 sind die arabischen Indizes 1, 2 und 3 der Funktionen P und Q durch römische (I, II, III) zu ersetzen.

Bezeichnungen.

Längen [m]

x	Koordinate in Richtung der Profilsehne
s	Profilabwicklung
$\Delta s = s_2 - s_1$	Schrittgrösse
y	Abstand von der Profiloberfläche
l	Profiltiefe
δ	Impulsverlustdicke
δ_S	Impulsverlustdicke auf der Saugseite an der Stelle $x/l = 0,9$
δ_D	Impulsverlustdicke auf der Druckseite an der Stelle $x/l = 0,9$
δ_H	Impulsverlustdicke an der Profilhinterkante
δ	Reibungsschichtdicke, bei der $\frac{u}{U} = 1$ angenommen wird
δ^*	Verdrängungsdicke
R	Radius des Profilabbildungskreises

Geschwindigkeiten [m/sec]

U_∞	ungestörte Anströmgeschwindigkeit
U	Geschwindigkeit an der äusseren Grenze der Reibungsschicht (Potentialgeschwindigkeit)
U_H	Wert von U an der Hinterkante ($x/l = 1$)
u	Geschwindigkeit in der Reibungsschicht parallel zur Oberfläche (in s -Richtung)
v	Geschwindigkeit in der Reibungsschicht senkrecht zur Oberfläche (in y -Richtung)

Drücke und Spannungen [kg/m²]

$q_\infty = (\rho/2) U_\infty^2$	Staudruck der ungestörten Strömung
$q = (\rho/2) U^2$	Staudruck der örtlichen Geschwindigkeit
$g = p + q$	Gesamtdruck
$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$	Wandschubspannung

Anderer physikalische Grössen:

ρ	Dichte $\left[\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4} \right]$
μ	Zähigkeit $\left[\frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2} \right]$
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	kinematische Zähigkeit $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \right]$

Winkel

α_{∞}	Anstellwinkel gegenüber der Profilsehne
$\beta^0 = \gamma - \varepsilon_0$	Winkel zwischen Profilsehne und theoretischer Nullauftriebsrichtung des Profils (γ und ε_0 siehe [20]).
$\alpha_e^* = \alpha_{\infty} + \beta$	
$\Delta \varepsilon_0$	durch Reibungsschichteinflüsse bedingte Veränderung des Nullauftriebswinkels
η_{KL}	Ausschlag-Winkel einer Spreiz-oder Wölbungs-klappe gegenüber dem Profilmriss
δ^0	Hinterkantenwinkel des Profils in Grad (ganzer Winkel)

Dimensionslose Grössen

$Re = \frac{U_{\infty} l}{\nu}$	mit der Profiltiefe l und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit U_{∞} gebildete Reynoldssche Zahl ($Re_{eff} = Re \times \text{Turbulenzfaktor}$)
$Re_{\phi} = \frac{U_{\phi} \phi}{\nu}$	mit den örtlichen Werten der Impulsverlustdicke ϕ und der äusseren Potentialgeschwindigkeit gebildete Reynoldssche Zahl
$\lambda = \frac{dU}{ds} \frac{\delta^2}{\nu} = U' \frac{\delta^2}{\nu}$	Formparameter der laminaren Reibungsschicht nach Pohlhausen
$z = \lambda / U'$	
$\varepsilon = \partial \left(\frac{U}{\nu} \right) / \partial \gamma \bigg _{\delta=0}$	
$\lambda^* = U' \frac{\phi^2}{\nu}$	Formparameter der laminaren Reibungsschicht nach Holstein-Bohlen und Koschmieder.
$z^* = \lambda^* / U'$	
$\beta = \frac{2}{m+1}$	Formparameter der laminaren Reibungsschicht in Strömungen von der Form $U = ks^m$ nach Hartree.

$$\varepsilon^* = \left(\frac{\partial \frac{u}{U}}{\partial \frac{y}{\delta}} \right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} Re_\delta$$

$$\Gamma_1 = \frac{U'}{U} (Re_\delta)^{1/4}$$

Formparameter der turbulenten Reibungsschicht (Buri)

$$\eta = 1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2_{y=0}$$

Formparameter der turbulenten Reibungsschicht (Gruschwitz)

η_{Kr}

Wert η , bei dem Strömungsablösung einsetzt

$$h = 1 - \left(\frac{U}{U_{\max}} \right)^2 = f(\eta) \text{ für Abschätzung des Formparameters } \eta \text{ zu benutzende Rechengrösse nach Ackeret}$$

Sonstige Bezeichnungen:

A, B, C Koeffizienten im Ansatz für das laminare Geschwindigkeitsprofil

α Exponent im Ansatz für das laminare Geschwindigkeitsprofil

f Funktion von λ bzw. λ^*

P, Q Funktionen von $\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\frac{\Delta s}{\delta}$ und Re_δ mittel (zur vereinfachten Berechnung des Formparameters η der turbulenten Reibungsschicht)

ξ

Funktion von η und $\frac{U_H}{U_\infty}$ (zur Berechnung des Profilwiderstandes c_{wp} nach Pretsch).

I. Einleitung.

Die Nutzenanwendung wichtiger Ergebnisse der Theorie wird manchmal entscheidend dadurch gehemmt, dass die numerische Behandlung des Einzelfalles zu grossen Zeitaufwand erfordert. Ein geringer, vom Standpunkt des Praktikers aus gesehen meist unwesentlicher Verzicht auf Genauigkeit ermöglicht dann oft grosse Vereinfachungen des Rechnungsganges, die der Theorie mit einem Male ein breites Feld der Nutzenanwendung erschliessen.

Diese Feststellungen treffen z.B. für die Theorie der Reibungsschichten zu. Gerade in neuerer Zeit sind hier Vereinfachungen der Rechnung, vor allem für die laminare Reibungsschicht, entwickelt worden, die den Zeitbedarf auf Bruchteile des bisherigen Umfanges verringert haben. Zu erwähnen sind in erster Linie die Vereinfachungsvorschläge von H o l s t e i n und B o h l e r [1] und von K o s c h m i e d e r und W a l z [2].

Nachstehend wird neben einem kritischen Ueberblick über die bisherigen Rechenverfahren eine weitere Vereinfachung des letztgenannten Verfahrens für die laminare Reibungsschicht, sowie ein neues Verfahren für die Berechnung der turbulenten Reibungsschicht mitgeteilt, das auf der Grundlage der Messungen von A. K e h l [3] den Einfluss der Re-Zahl vollständiger als das bekannte Verfahren von G r u s c h w i t z [4] berücksichtigt.

II. Die Berechnung der laminaren Reibungsschicht.

1.) Allgemeines.

Die Grundlage aller Reibungsschichtberechnungen ist die Prandtlsche Differentialgleichung

$$\ddot{u} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial s} + v \frac{\partial \ddot{u}}{\partial y} = U \frac{dU}{ds} + \nu \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial y^2} \quad \dots \quad (1)$$

mit

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \dots \quad (2)$$

die sich aus den allgemeinen N a v i e r - S t o c k e s s c h e n Strömungsgleichungen unter der Voraussetzung kleiner Zähigkeit, d.h. grosser Reynoldsscher Zahl ergibt (eine Voraussetzung, die,

von Sonderfällen abgesehen, in der technischen Aero- und Hydrodynamik stets erfüllt ist).

Von dieser Differentialgleichung ausgehend haben Blasius [5] für die ebene Plattenströmung ($\frac{dU}{ds} = 0$) später Howarth [7] und Hartree [6] für allgemeinere Strömungsformen und in neuerer Zeit Görtler [8], Mangler [9] und Schröder [10] für beliebige Form der äusseren Geschwindigkeitsverteilungen $U(s)$ Berechnungen der Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ in der laminaren Reibungsschicht durchgeführt und ihre Entwicklung in Strömungsrichtung verfolgt.

Einer breiteren Nutzanwendung dieser Verfahren steht leider der zu ihrer Durchführung erforderliche grosse Zeitaufwand entgegen¹⁾. Da aber die Berechnung der Reibungsschicht der Ausgangspunkt für jede theoretische Behandlung von Strömungen mit Reibung und insbesondere von Fragen des Widerstandes und Höchstauftriebes von Tragflügelprofilen ist, war man von jeher um eine Vereinfachung dieser Rechnungen bemüht und bereit, diese Vereinfachung mit einer Genauigkeitseinbuße zu erkaufen.

Eine fruchtbare Entwicklung in dieser Richtung wurde mit einem Vorschlag von v. Kármán eingeleitet, der dahin ging, die Form der möglichen „Geschwindigkeitsprofile“, also den Verlauf $u(y)$, irgendwie physikalisch sinnvoll abzuschätzen und die Veränderung dieser Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung s abhängig von einer vorgegebenen äusseren Geschwindigkeitsverteilung $U(s)$ mit Hilfe des auf die Reibungsschicht angewandten Impulssatzes

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d(U^2 \delta)}{ds} + \delta^* U \frac{dU}{ds} \dots \dots \dots (3)$$

zu verfolgen. Hierin bedeuten

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U}) dy \quad \text{die Verdrängungsdicke} \dots \dots (4)$$

¹⁾ Ein soeben bekannt gewordenes neues Rechenverfahren (Differenzenverfahren) von Göttler [11] erfordert für die Berechnung eines mit 10 Punkten belegten laminaren Geschwindigkeitsprofils (d.h. für einen Schritt in Strömungsrichtung nur noch etwa 1 Stunde.

$$\delta = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{u}}{U} (1 - \frac{\tilde{u}}{U}) dy \dots\dots\dots \text{die Impulsverlustdicke} \quad (5)$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=0} \dots\dots\dots \text{die Wandschubspannung} \quad (6)$$

2.) Das Verfahren von Pohlhausen.

K. P o h l h a u s e n [12] hat diesen Gedankengang erstmalig zu einem praktisch brauchbaren Rechenverfahren ausgebaut.

Das wesentliche Merkmal dieses Verfahrens ist ein viergliedriger Polynom-Ansatz für $\frac{u}{U}$ von der Form

$$\frac{\tilde{u}}{U} = \alpha_1 \frac{y}{\delta} + \alpha_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \alpha_4 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \dots\dots\dots (7)$$

mit δ als dem Wandabstand, bei dem $\frac{u}{U} = 1$ als erreicht betrachtet wird. Die Koeffizienten dieses Polynoms bestimmen sich aus den Randbedingungen

$$y=0 : \quad \frac{\tilde{u}}{U} = 0 ; \quad \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -U U' \quad (\text{aus Gl. (1)}) \dots\dots (8)$$

$$y=\delta : \quad \frac{\tilde{u}}{U} = 1 ; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

Hierbei zeigt sich, dass die dimensionslose Grösse

$$\lambda = \frac{dU}{ds} \frac{\delta^2}{\nu} = \frac{U' \delta^2}{\nu} \dots\dots\dots (10)$$

die Rolle eines Formparameters spielt. Durch Einsetzen von (7) in (3) mit Berücksichtigung der Gl. (4) bis (6) erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in λ oder, wenn man

$$\frac{\delta^2}{\nu} = z \dots\dots\dots (11)$$

setzt, in z :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{f(\lambda)}{U} + z^2 U'' g(\lambda), \dots\dots\dots (12)$$

die für eine gegebene äussere Geschwindigkeitsverteilung $U(s)$ graphisch nach bekannten Verfahren gelöst werden kann. f und g sind hierbei Funktionen von λ :

$$f(\lambda) = -2 \frac{[(\delta'/\delta) + 2(\eta/\delta)]\lambda - \varepsilon(\lambda)}{(\eta/\delta) + 2\lambda \frac{d(\eta/\delta)}{d\lambda}} \quad (13)$$

$$g(\lambda) = - \frac{\frac{d(\eta/\delta)}{d\lambda}}{(\eta/\delta) + 2\lambda \frac{d(\eta/\delta)}{d\lambda}} \quad (14)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \left(\frac{\partial(\tilde{u}/u)}{\partial(\eta/\delta)} \right)_{\eta=0} \quad (15)$$

also vom einzelnen Beispiel unabhängig.

Der Ansatz (7) von P o h l h a u s e n ist ausser durch die Randbedingungen (8) physikalisch allerdings nur dadurch gestützt, dass er das von B l a s i u s exakt berechnete Geschwindigkeitsprofil der ebenen Plattenströmung ($\lambda = 0$) mit guter Näherung wiedergibt. Alle übrigen Geschwindigkeitsprofile, im besonderen auch das die laminare Ablösung kennzeichnende Geschwindigkeitsprofil mit $\lambda = -12$ und das Staupunktprofil mit $\lambda = 7,075$, besitzen keine nähere physikalische Begründung, haben sich aber trotzdem in den meisten Fällen bei Druckanstieg und mässigem Druckabfall (bis $\lambda = +12$) bewährt, was darauf schliessen lässt, dass die Kennzeichnung der laminaren Geschwindigkeitsprofile durch den Parameter λ einigermaßen eindeutig ist. Bei λ - Werten grösser als +12 versagt der Ansatz (er liefert dann physikalisch sinnlose Geschwindigkeitsprofile mit Werten $\frac{u}{U} > 1$ in der Reibungsschicht).

3.) Das Verfahren von H o l s t e i n und B o h l e n .

Das Verfahren von P o h l h a u s e n wurde zwei Jahrzehnte lang fast ausschliesslich für Berechnungen der laminaren Grenzschicht benutzt. In jüngster Zeit fanden nun H. H o l s t e i n und T. B o h l e n [1] und etwas später unabhängig davon F. K o s c h m i e d e r [2], dass das Glied mit der unbequemen zweiten Ableitung $U''(s)$ in der Differentialgleichung (12) eigentlich nur ein Schönheitsfehler ist, der vermieden wird, sobald man anstelle der nur mathemati-

Strömungen von der Form $U = k s^{\text{III}}$ (bei Druckanstieg und Druckabfall) oder für die von L. H o w a r t h [7] für den Fall $U = U_0 + ks$ exakt berechneten Geschwindigkeitsprofile eine einparametrische Interpolationsformel aufstellt, die im übrigen die Eigenschaft haben soll,

bis zu unendlich grossem Druckabfall ($U' = \infty$) physikalisch sinnvolle Geschwindigkeitsprofile zu liefern. Diese Forderungen erfüllt z.B. der folgende Ansatz:

$$\frac{\tilde{u}}{U} = 1 - [1 + A \ln Y + B (\ln Y)^2 + C (\ln Y)^3] Y^\alpha \quad (16)$$

mit

$$Y = 1 - \frac{y}{\delta} \quad (17)$$

Mit den aus der Prandtlschen Differentialgleichung (1) abzuleitenden Randbedingungen

$$Y=1 \text{ (Wand)} : \frac{\tilde{u}}{U} = 0 ; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} = -\varepsilon ; \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} = -\frac{U'^2}{\nu} = -\lambda ; \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial Y^3} = 0 \quad (18)$$

sowie aus der Forderung einer Vermeidung ausgebeulter Geschwindigkeitsprofile ($\frac{U}{U_0} > 1$) und einer möglichst guten Annäherung der ganzen übrigen Form der Hartree-Profile erhält man für die Koeffizienten A, B und C und für die Grössen ε und α die Beziehungen

$$A = \varepsilon - \alpha \quad (19)$$

$$B = \frac{\alpha^2}{2} - \varepsilon \alpha + \frac{\lambda + \varepsilon}{2} \quad (20)$$

$$C = -\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 - \frac{\lambda + \varepsilon}{2} \alpha + \frac{\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{6} \quad (21)$$

$$\varepsilon = -0,260 + \sqrt{1,38\lambda + 9,72} \quad (15b)$$

$$\alpha = 6,88 + 0,040\lambda + 1,55 \ln(\lambda + 7,68) \quad (22)$$

Formparameter ist wiederum die Grösse $\lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu}$. Da der Exponent α für $\lambda \rightarrow \infty$ (d.h. $U' \rightarrow \infty$) auch gegen unendlich geht, wird der Faktor Y^α mit $\lambda = \infty$ null für alle Y zwischen 0 und 1,0 (auch wenn die Koeffizienten A , B und C unendlich gross werden) und damit $\frac{u}{U} = 1 = \text{konst.}$ Man erhält also für $\lambda = \infty$ das Rechteck-Geschwindigkeitsprofil mit der Verdrängungsdicke null.

Führt man wieder den Formparameter $\lambda^* = \frac{U' \theta^2}{\nu}$ ein, so kommt man auch mit diesem Ansatz (und ganz allgemein mit jedem einparametrischen Ansatz für $\frac{u}{U}$) zu der einfachen Schreibweise (12a) der Karmanschen Integralbedingung des Impulses (3). Die Funktion $f(\lambda^*)$ nach (13a) hat dann nur einen etwas anderen Verlauf, als beim P_4 -Ansatz Bild 1. Dem Staupunkt entspricht hierbei ein Wert $\lambda^* = 0,0853$, dem Blasius-Profil der Wert $\lambda^* = 0$, dem Ablöseprofil nach Hartree $\lambda^* = -0,0682$, nach Howarth $\lambda^* = -0,0841$. Bemerkenswert ist, dass die Funktionen $f(\lambda^*)$ im Gebiet positiver λ^* -Werte (beschleunigte Strömung) für die Geschwindigkeitsprofile von Hartree und von Howarth praktisch gleich sind. λ und λ^* sind durch die Beziehung

$$\lambda = \lambda^* \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^2 \quad \dots \quad (23)$$

miteinander verknüpft. Zusammengehörige Werte der Grössen $\lambda, \lambda^*, f, \epsilon^*, \delta/\theta, A, B, C$ und α sind aus Zahlentafel 1 ersichtlich. (Seite 13)

Interessiert man sich nur für die Grössen $\lambda^*, \epsilon^*, \theta$ und δ^* und nicht dafür, wie die Geschwindigkeitsprofile und ihre Ableitungen nach y im einzelnen aussehen (dies ist die Regel), so kann man auch ohne eine Interpolationsformel für die Geschwindigkeitsprofile zu Gl. (12a) kommen. Man kennt ja für jedes der exakt gerechneten Geschwindigkeitsprofile die zugehörigen Grössen $\lambda^*, \epsilon^*, \theta$ und δ^* und kann somit die einzige, für eine Berechnung dieser Grössen nach Gl. (12a) nötige Funktion $f(\lambda^*)$ wenigstens in dem Bereich $\lambda^* = -0,0841$ bis $+0,1107$ ermitteln.

Um auch bei Strömungen mit grossen Beschleunigungen, denen ein λ^* -Bereich $\lambda^* > +0,1107$ entspricht, rechnen zu können, ist es erforderlich, die Funktion $f(\lambda^*)$ zu grossen λ^* -Werten hin physikalisch sinnvoll zu ergänzen.

Da $f(\lambda^*)$ im Bereich positiver λ^* -Werte mit guter Genauigkeit durch eine Gerade

$$f(\lambda^*) = \alpha - b \lambda^* \quad (13b)$$

mit

$$\alpha = 0,441 \quad ; \quad b = 5,165$$

angenähert werden kann, liegt es nahe, $f(\lambda^*)$ nach diesem Gesetz (13b) bis $\lambda^* = \infty$ fortzusetzen ²⁾.

Tut man dies, so hat man auf Grund der Gleichung (13a) über den Verlauf der Funktion $\frac{\delta^*}{\vartheta}(\lambda^*)$ in der Weise verfügt, dass die Beziehung

$$\frac{\delta^*}{\vartheta} = 0,5825 - \frac{0,2204}{\lambda^*} + \frac{\varepsilon^*}{\lambda^*} \quad (13c)$$

gelten muss. Für den nun noch wählbaren Verlauf von $\varepsilon^*(\lambda^*)$ wird durch die bei endlichem λ^* gegebenen ε^* -Werte ein Ansatz von der Form

$$\varepsilon^* = k_1(\lambda^* - \lambda_0^*) + k_2(\lambda^* - \lambda_0^*)^n \quad (15c)$$

mit $\lambda_0 = -0,0682$ nahegelegt. Als passende Werte der Koeffizienten k_1 und k_2 und des Exponenten n wurden

$$k_1 = 0,4175 \quad ; \quad k_2 = 0,8030 \quad ; \quad n = 0,5325$$

gefunden. Der Wert $\frac{\delta^*}{\vartheta}$ für $\lambda^* = \infty$ ist hierbei gleich 1 ³⁾.

Die mit den Gleichungen (13b), (13c) und (15c) festgelegte Fortsetzung der Funktionen f , $\frac{\delta^*}{\vartheta}$ und ε^* entspricht nicht ganz der in den Gleichungen (15b) und (22) ausgedrückten Fortsetzung der Funktionen $\varepsilon(\lambda)$ und $\alpha(\lambda)$.

Der lineare Ansatz für die Funktion $f(\lambda^*)$ bietet, wie wir gleich sehen werden, für die Lösung der Differential-

²⁾ Die Festsetzung, dass dem Rechteck-Geschwindigkeitsprofil der Wert $\lambda^* = \infty$ entsprechen soll, enthält eine gewisse (aber zweckmässige) Willkür. Es sind nämlich beschleunigte Strömungen denkbar, in denen $\frac{\delta^*}{\vartheta}$ schneller abnimmt als U wächst, so dass $\lambda^* = \frac{U}{\delta^*}$ endlich bleibt. Für den Strömungstyp $U = k s^m$, der den Geschwindigkeitsprofilen von Hartree zugrunde liegt, trifft dies nach einer Rechnung, die Herr W. Mangler dem Verfasser zur Verfügung stellte, zu. Für das Rechteckprofil ($m = -1$) wird nach dieser Rechnung $\lambda^* = 0,1416$, $\varepsilon^* = 0,4347$, $\frac{\delta^*}{\vartheta} = 2,0697$, $f = -0,2832$.

³⁾ $\frac{\delta^*}{\vartheta}(\lambda^* = \infty)$ muss jedoch nicht gleich 1 sein, wie in [2] irrtümlich behauptet wurde. Welchen Wert man erhält, hängt ganz von der Art des Ansatzes ab, den man für das Geschwindigkeitsprofil voraussetzt. Auf den Wert $\lambda^*/\vartheta = 1$ führt z.B.

gleichung grosse Vorteile. Da dieser Ansatz in Verbindung mit den Gl. (13c) und (15c) auch keine grössere Willkür erhält als die Ansätze der Gl. (15b) und (22) für das Geschwindigkeitsprofil, wollen wir auf alle Fälle an ihm festhalten und dafür eine Umwandlung der Gleichungen (15b) und (22) vornehmen (eine etwas zeitraubende Arbeit deren Durchführung zurückgestellt wurde, da man ja für die meisten praktischen Zwecke mit den Ansätzen (13b), (13c) und (15c) auskommt).

b) Vereinfachte Lösung der Differentialgleichung.

Wenn die Funktion $f(\lambda^*)$ von ganz allgemeiner Form ist, so findet man die Lösung $z^*(s)$ der Differentialgleichung (12a) zu einer beliebigen äusseren Geschwindigkeitsverteilung $U(s)$ mit einer der üblichen Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen (z.B. mit dem Isoklinen-Verfahren). Mit z^* und der ersten Ableitung U' von $U(s)$ nach der Bogenlänge s hat man dann zugleich den Formparameter $\lambda^* = U' z^*$ und mit Gl. (13c) und (15c) (oder aus Zahlentafel 1) auch die Grössen $\frac{\delta^*}{y}$ und ϵ^* . Der Zusammenhang zwischen λ^* und dem Parameter $\lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu}$, mit dem (falls erforderlich) aus Gl. (16) bis (22) die Form des Geschwindigkeitsprofils berechnet werden kann, ist bis $\lambda^* = 0,1107$ aus Zahlentafel 1 zu entnehmen. Der nahezu lineare Verlauf der Funktion $f(\lambda^*)$ eröffnet die auch schon von Holstein und Bohlen im Zusammenhang mit dem Pohlhausenansatz besprochene Möglichkeit, die Lösung der Differentialgleichung (12a) zu vereinfachen. Führt man nämlich den Ansatz (13b) in (12a) ein, so kann man integrieren und erhält

$$z^* = \frac{y^2}{\nu} = z_1^* \left(\frac{U_1}{U} \right)^b + \frac{a}{U^b} \int_1^U U^{b-1} ds \quad (24)$$

Für die Integration vom Staupunkt ($s = s_1$, $U_1 = 0$) aus wird

$$\frac{y^2}{\nu} = \frac{a}{U^b} \int_{s_1}^s U^{b-1} ds \quad (24a)$$

der von P r e t s c h [17] für Geschwindigkeitsprofile der turbulenten Reibungsschicht gewählte Ansatz

$$\tilde{u}/U = (\eta/\delta)^{1/\alpha} \quad (16b)$$

da

$$\delta^*/\lambda = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

ist und dem Rechteckprofil der Wert $\alpha = \infty$ entspricht. Setzt man dagegen

$$\tilde{u}/U = 1 - (1 - \eta/\delta)^\alpha \quad (16a)$$

(Sonderfall des Ansatzes (16) für $A = B = C = 0$); so wird für das Rechteckprofil ($\alpha = \infty$)

$$\delta^*/\lambda = \frac{2\alpha+1}{\alpha} = 2$$

Den Hinweis auf diese Zusammenhänge verdankt der Verfasser Herrn W. M a n g l e r .

Im Bereich positiver λ^* - Werte fanden wir für die Koeffizienten a und b die Werte $a = 0,441$ und $b = 5,165$. Im Bereich negativer λ^* - Werte weicht $f(\lambda^*)$ etwas von der durch diese Koeffizienten festgelegten Geraden ab. Hier passt sich eine Gerade mit dem etwas grösseren Wert $b = 6,15$, aber gleichen a, besser dem Verlauf von $f(\lambda^*)$ an.

Zur Bestimmung des Verlaufs der Impulsverlustdicke längs der Profilabwicklung s braucht man somit nur eine schrittweise Planimetrierung der Kurve U^{b-1} durchzuführen, wobei die Potenzen U^{b-1} aus einem Nomogramm entnommen werden können.

Die praktische Rechnung lässt sich noch weiter ohne merkliche Genauigkeitseinbusse vereinfachen, wenn man den gegebenen Verlauf $U(s)$ durch Geradenstücke annähert.

Für die einzelnen Geraden-Abschnitte gilt dann

$$U = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{s_2 - s_1} s \quad (25)$$

Damit geht Gl. (24) über in

$$\left(\frac{\lambda^2}{\nu}\right)_2 = \left(\frac{\lambda^2}{\nu}\right)_1 \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b + \frac{a}{b} \frac{1 - \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b}{\frac{U_2 - U_1}{s_2 - s_1}} \quad (24b)$$

oder etwas anders geschrieben

$$\frac{(\lambda^2 \text{Re}_d)_2}{(\lambda^2 \text{Re}_d)_1} = \frac{U_2}{U_1} \left[\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b + \frac{a}{b} \frac{1 - \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b}{\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)} \frac{\Delta s}{(\lambda^2 \text{Re}_d)_1} \right] \quad (24c)$$

mit $\text{Re}_d = \frac{U}{\nu}$ und $\Delta s = s_2 - s_1$ (Abschnittbreite).

Index 1 bedeutet hierbei den Anfang, Index 2 das Ende der einzelnen Abschnitte.

Man kann auch $U^{b-1}(s)$ durch Geradenstücke ersetzen und erhält dann aus (24)

$$\frac{(\lambda^2 \text{Re}_d)_2}{(\lambda^2 \text{Re}_d)_1} = \frac{U_2}{U_1} \left\{ \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b + \frac{a}{2} \left[\frac{U_1}{U_2} + \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^b \right] \frac{\Delta s}{(\lambda^2 \text{Re}_d)_1} \right\} \quad (24d)$$

Für $\frac{U_1}{U_2} = 1$ gehen Formel (24c) und (24d) ineinander über. Formel (24d) erlaubt es, in Gebieten mit negativer zweiter Ableitung der Kurve $U(s)$ und $U > 1$, z.B. im Bereich des Maximums von $U(s)$ bei einer der Formel (24c) entsprechenden Genauigkeit etwas grössere Schritte Δs zu wählen, da hier die Kurve U^{b-1} gegenüber $U(s)$ weniger gekrümmt verläuft.

Die Formeln (24c) und (24d) kann man in Nomogrammform mit den Skalen U_2/U_1 , $\frac{\Delta s}{L} / (\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_1$ und $(\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_2 / (\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_1$ darstellen. Bild 2 gilt für (24c), Bild 3 für (24d)⁴⁾. Die Maßstäbe dieser Nomogramme sind so gewählt, dass die Genauigkeit, mit der $U(s)$ üblicherweise gegeben ist, ausgeschöpft werden kann.

Im Staupunkt ist $\lambda^* = 0,08537$ und $\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta = 0$. Damit ergibt sich für den ersten Schritt ein Wert $\frac{\Delta s}{L} / (\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_1 = \infty$. Da gleichzeitig auch $\frac{U_2}{U_1} = \infty$ wird ($U_1 = 0$), ist die Aufgabe unbestimmt. Man vermeidet diese Unbestimmtheit, wenn man annimmt, dass λ^* auch noch in der Nähe des Staupunktes, z.B. bis an das Ende eines ersten kleinen Schrittes, den Wert 0,08537 behält (eine Annahme, die sich als zulässig erwiesen hat). Dann ist am Ende dieses Abschnittes

$$(\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_2 = \frac{\lambda^*}{U_2} U_2 = \frac{0,08537}{U_2/\Delta s/L} U_2 = 0,08537 \Delta s/L \quad \dots (26)$$

Mit dem so errechneten ersten Wert $\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta$ führt man die Rechnung an Hand des Nomogrammes, Bild 2, weiter bis $\frac{\Delta s}{L} / (\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_1$ auf Werte unter 2 abgenommen hat. Dann geht man in das Nomogramm Bild 3 über. Wenn $\Delta s/L / (\frac{\vartheta}{L} \text{Re}_\vartheta)_1$ die im Nomogramm Bild 3 enthaltenen Werte annimmt, hat man sich in der Regel schon dem Druckminimum genähert und würde hier aus den oben genannten Gründen sowieso mit diesem Nomogramm arbeiten.

Als Anhalt für die Wahl der Schrittgrösse Δs kann gelten, dass Δs nicht kleiner gewählt zu werden braucht als die Abstände, die man bei der Berechnung von Geschwindigkeits-Verteilungen zur eindeutigen Belegung des Kurvenverlaufs ohnehin vorsehen muss. Bei diesen Schnittgrössen liefern übrigens die Nomogramme Bild 2 und 3 praktisch die gleichen Ergebnisse.

Eine Abschätzung des durch die endliche Schrittgrösse bedingten Fehlers kann man sich im Einzelfall z.B. in der Weise verschaffen, dass man probeweise auf halbe Schrittgrösse übergeht und feststellt, welche Abweichungen sich gegenüber der ersten Rechnung ergeben. Bild 4 veranschaulicht eine Genauigkeitsprüfung dieser Art.

Das Rechenschema ist nachstehend wiedergegeben:

⁴⁾ In diesen Nomogrammen ist die Änderung der Steigung b der Kurve $f(\lambda^*)$ beim Uebergang von positiven zu negativen Werten λ^* (von $b = 5,165$ und $6,15$) berücksichtigt.

Schema zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht.

①	②	③	④	⑤ = $\frac{③_2}{①_1}$	⑥	⑦ = $\frac{⑥_2}{①_1}$	⑧ = $\frac{⑦_2}{②_2}$	⑨ = $\sqrt{\frac{⑧}{Re}}$
s/l	U/U_∞	$\Delta s/l$	U_2/U_1	$\frac{(\Delta s/l)_2}{(\frac{\nu}{l} Re)_1}$	$\frac{(\frac{\nu}{l} Re)_2}{(\frac{\nu}{l} Re)_1}$	$\frac{\nu}{l} Re$	$(\frac{\nu}{l})^2 \cdot Re$	ν/l
					aus Nomogramm, Bild 2 bezw. 3, zu ④ und ⑤ ablesen	1. Schritt nach Gl. (26)		

⑩ = ④ - 1,0	⑪ = $\frac{⑩_2 \cdot ②_1}{③_2}$	⑫ = $\frac{⑧_2 + ⑧_1}{2,0}$	⑬ = ⑪ · ⑫	⑭ = $\frac{①_2 + ①_1}{2,0}$
$\frac{U_2}{U_1} - 1,0$	$\frac{d(U/U_\infty)}{d(s/l)}$	$\overline{(\frac{\nu}{l})^2 Re}$	λ^*	$\frac{1}{2} \frac{s_1 + s_2}{l}$
			über ⑭ auftragen	

Neuer Ansatz für das laminare Geschwindigkeitsprofil

Zusammenstellung wesentlicher Werte.

Zahlentafel 1

B	λ^*	ε^*	δ^*/θ	f	λ	A	B	C	α
-0,1988	-0,0682	0	4,038	0,8225	-6,84	-6,06	+15,5	-19,30	6,33
-0,190	-0,0632	0,0496	3,480	0,7916	-6,55	-6,24	+16,25	-22,30	6,80
-0,180	-0,0580	0,0730	3,296	0,7605	-6,24	-6,40	+17,4	-24,90	7,20
-0,160	-0,0488	0,1053	3,091	0,7076	-5,63	-6,63	+19,10	-29,00	7,79
-0,140	-0,0407	0,1290	2,963	0,6630	-4,98	-6,80	+20,35	-32,10	8,25
-0,10	-0,0266	0,1644	2,797	0,5852	-3,64	-6,995	+21,80	-35,74	8,90
0	0	0,2204	2,591	0,4408	0	-7,189	+23,19	-38,67	10,05
0,10	0,0190	0,2556	2,481	0,3420	3,78	-7,232	+23,28	-37,58	10,83
0,20	0,0333	0,2802	2,412	0,2664	7,58	-7,185	+22,78	-35,13	11,42
0,30	0,0448	0,2992	2,359	0,2091	11,56	-7,128	+22,02	-32,13	11,94
0,40	0,0537	0,3127	2,328	0,1611	15,35	-7,063	+21,20	-29,15	12,36
0,50	0,0608	0,3232	2,300	0,1216	19,00	-7,000	+20,40	-26,35	12,74
0,60	0,0676	0,3343	2,275	0,0901	24,30	-6,910	+19,21	-22,48	13,22
0,80	0,0778	0,3494	2,241	0,0389	31,60	-6,785	+17,61	-17,82	13,83
1,00	0,08537	0,3602	2,217	0	40,00	-6,680	+15,75	-14,00	14,48
1,20	0,0914	0,3687	2,199	0,0305	49,2	-6,567	+13,92	-10,70	15,12
1,60	0,100	0,3802	2,175	0,0751	68,9	-6,383	10,9	-5,39	16,36
2,00	0,1063	0,3891	2,157	0,1063	92,5	-6,252	5,93	-2,84	17,71
2,40	0,1107	0,3946	2,142	0,1291	117,6	-6,212	1,926	-5,04	19,06
	0,12	0,4080	2,1458	0,1788					
	0,15	0,4474	2,0962	0,3337					
	0,20	0,5100	2,0305	0,592					
	0,30	0,6248	1,9299	1,1085					
	0,50	0,8310	1,8037	2,0672					
	1,00	1,2765	1,6386	4,724					
	5,00	4,0220	1,3432	24,64					
	10,00	6,9480	1,2553	51,21					
	100,00	51,1180	1,0921	516,1					
	1000	449,2300	1,0315	5165					
	∞	∞	1,000	∞	∞				∞

III. Die Berechnung der turbulenten Reibungsschicht.

1.) Allgemeines.

Die turbulente Reibungsschicht unterscheidet sich von der laminaren im wesentlichen dadurch, dass für sie ein anderes Schubspannungsgesetz gilt. Während bei der laminaren Reibungsschicht die Schubspannung in jedem Wandabstand y durch die Beziehung

$$\tau = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad \dots \quad (6a)$$

gegeben ist, tritt in der turbulenten Reibungsschicht noch eine durch die turbulenten Austauschbewegungen bedingte zusätzliche Schubspannung auf, die man in der Form

$$\tau' = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \dots \quad (6b)$$

anschreiben kann, wo A als "Austausch" oder "scheinbare Zähigkeit" bezeichnet wird und \bar{u} der zeitliche Mittelwert von \tilde{u} ist. Die gesamte Schubspannung τ_{ges} in der turbulenten Reibungsschicht ist damit

$$\tau_{ges} = (\mu + A) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \dots \quad (6c)$$

An der Wand ist $A = 0$, weil dort kein Austausch senkrecht zur Wand mehr stattfinden kann. In geringem Wandabstand ist A meist schon sehr viel grösser als μ (bis zu einigen Zehnerpotenzen grösser) und ist damit fast allein für den Schubspannungsverlauf massgebend.

Für Strömungen ohne Druckgefälle wurde auf Grund von Dimensionsbetrachtungen über den Austauschvorgang (bei dem der von P r a n d t l eingeführte "Mischungsweg" eine grosse Rolle spielt) eine Berechnung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils möglich, die recht gut mit Messungen übereinstimmt. Die Schubspannung τ_0 an der Wand, die für den Reibungswiderstand massgebend ist, ergab sich hierbei für einen grossen Bereich Reynoldsscher Zahlen mit guter Nähe-

rung zu

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,01255 \operatorname{Re}_x^{-1/4} \quad \dots \quad (6d)$$

Für Strömungen mit Druckanstieg und Druckabfall ist jedoch eine ähnlich gute Berechnung des Schubspannungsverlaufs und darauf aufbauend der turbulenten Geschwindigkeitsprofile noch nicht geglückt. Aus den zur Verfügung stehenden Messungen (Nikuradse [13], Gruschwitz [4], Schmidbauer [14], Kehl [3]) war bis jetzt auch noch keine klare Gesetzmässigkeit in der Abhängigkeit der Wandschubspannung und des Schubspannungsverlaufs vom Druckgradienten zu erkennen⁵⁾. Man weiss zwar z.B., dass τ_0 für das bei turbulenter Ablösung auftretende Geschwindigkeitsprofil null sein muss. Es ist jedoch nicht sicher, ob $\tau_0/\rho U^2$ bei Druckanstieg, wie man erwarten möchte, stets kleiner als bei der ebenen Platte (nach (6d)) ist und mit der Annäherung an den Ablösezustand irgendwie monoton gegen null geht. Bei manchen Messungen zeigt sich vielmehr, dass $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$ mit zunehmendem Druckanstieg zunächst noch wächst, um erst kurz vor der Ablösung auf null abzusinken⁶⁾.

Nach bisherigen Erfahrungen scheint das Blasius'sche Gesetz (6d) für die Wandschubspannung mit guter Näherung auch für Strömungen mit von null verschiedenen Druckgradienten zu gelten (den Ablösebereich ausgenommen wo $\tau_0 = 0$ sein muss). Von dieser Tatsache kann mit Vorteil bei einer näherungsweise Berechnung der turbulenten Reibungsschicht zu einer gegebenen beliebigen äusseren Geschwindigkeitsverteilung Gebrauch gemacht werden. Bemerkenswert ist, dass es auf die Genauigkeit dieser Näherung umso weniger ankommt, je grösser der Druckgradient ist.

5) Um die Klärung dieser Zusammenhänge haben sich in neuerer Zeit W. Mangler und A. Kehl auf der Grundlage der Reibungsschichtmessungen von A. Kehl [3] bemüht, [29]; vergl. ferner H. Wieghardt [30]

6) Offenbar kann die turbulente Austauschbewegung mit wachsendem Druckanstieg zunehmen, was dann eine Erhöhung der Schubspannung zur Folge hat.

Um die Entwicklung von Näherungsverfahren, die mit vereinfachenden Annahmen über die Wandschubspannung und die Gestalt der turbulenten Geschwindigkeitsprofile arbeiten, haben sich zuerst E. G r u s c h w i t z [4] und A. B u r i [15] bemüht.

Zunächst sei das im Gedankengang mit dem Näherungsverfahren für die laminare Reibungsschicht verwandte, jedoch hinsichtlich des benützten Formparameters nur beschränkt gültige Verfahren von Buri besprochen.

2.) Das Verfahren von B u r i .

Buri führt für das turbulente Geschwindigkeitsprofil den Formparameter

$$\Gamma_1 = \frac{U'}{U} \nu Re_\lambda^{1/4} \quad (27)$$

ein, , der dem bei der laminaren Reibungsschicht benützten Formparameter

$$\lambda^* = \frac{U' \nu^2}{\nu} = \frac{U'}{U} \nu Re_\lambda \quad (10a)$$

entspricht, wenn man das Schubspannungsgesetz der laminaren Reibungsschicht durch die Blasius'sche Schubspannungsformel (6a) ersetzt und im übrigen annimmt, dass die Gestalt des Geschwindigkeitsprofils durch den Wert $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} = -U U'$ (aus (1)) ausreichend gekennzeichnet sei. Die Karmansche Integralbedingung des Impulses (3) kann dann in der Form

$$\frac{d(\nu Re_\lambda^{1/4})}{ds} = a_1 - b_1 \Gamma_1 = a_1 - b_1 \frac{U'}{U} \nu Re_\lambda^{1/4} \quad (28)$$

geschrieben werden. , aus der durch Integration die einfache, der Gl. (24) für die laminare Reibungsschicht sehr ähnliche Beziehung

$$\nu Re_\lambda^{1/4} = \frac{a_1}{U^{b_1}} \left(\int U^{b_1} ds + C \right) \quad (29)$$

folgt. Die Konstanten a_1 und b_1 ergaben sich aus Messungen zu

$$a_1 = 0,017$$

$$b_1 = 4,75 \text{ bis } 5,15$$

Mit Gl. (29) findet man für eine beliebige vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung U (δ) den Verlauf von δ $Re_{\delta}^{1/4}$ und durch Multiplikation mit $\frac{U'}{U}$ den Verlauf des Formparameters Γ_1 .

Leider ist dieser Formparameter Γ_1 nach bisherigen Erfahrungen zur Kennzeichnung der technisch stark interessierenden turbulenten Ablösestelle der Strömung nicht besonders gut geeignet. Man fand Strömungsablösung bei Werten $\Gamma_1 = -0,0$ bis $-0,09$ (offenbar kommt bei diesem Formparameter der Einfluss der örtlichen Geschwindigkeitsänderung U' gegenüber der im Wert von δ ausgedrückten Vorgeschichte des Geschwindigkeitsprofils zu stark zur Geltung). Die grosse Einfachheit dieses Verfahrens lässt es jedoch lohnend erscheinen, die Brauchbarkeit des Formparameters über bisherige Erprobungen hinaus einer erneuten eingehenden Prüfung zu unterziehen.

Wir werden in Abschnitt III 5b) ein an die Schreibweise (12a) der Karmanschen Integralbedingung anknüpfendes, dem Verfahren von Buri sehr ähnliches Verfahren ableiten und, den Rechenverfahren für die laminare Reibungsschicht entsprechend eine weitere Vereinfachung durch abschnittweises Konstantsetzen von U' anschliessen. Dieses Verfahren ist dann, wenn auch nicht immer, zu einer Bestimmung der Gestalt des Geschwindigkeitsprofils, so doch zur Berechnung des Verlaufs von δ besonders gut geeignet. Auch eine Nachprüfung der Brauchbarkeit des Formparameters Γ_1 soll dort erfolgen.

In den folgenden beiden Abschnitten wollen wir uns zunächst mit den Rechenverfahren von G r u s c h w i t z [4] und K e h l [3] befassen, die eine genauere Verfolgung der Formänderung der Geschwindigkeitsprofile und damit auch eine zuverlässigere, wenn auch noch nicht völlig befriedigende Bestimmung der turbulenten Ablösestelle ermöglichen.

3.) Das Verfahren von G r u s c h w i t z . .

Der Verwendung des Formparameters Γ_1 liegt

die Voraussetzung zugrunde, dass bestimmte, durch die Beziehung $\frac{\partial \tau}{\partial y}_{y=0} = -U U'$ ausgedrückte Formeigenschaften des Geschwindigkeitsprofils in unmittelbarer Wandnähe stets mit einer bestimmten Form des grösseren äusseren Teiles des Geschwindigkeitsprofils gekoppelt sind. Da sich jedes der in grösserem Wandabstand strömenden Teilchen zu einem früheren Zeitpunkt einmal in Wandnähe befand, muss der äussere Teil des Geschwindigkeitsprofils der Ausdruck der Vorgeschichte der Reibungsschichtströmung sein. Die Kennzeichnung eines Geschwindigkeitsprofils durch den Formparameter Γ_1 bedeutet somit, dass ~~man~~ seine Vorgeschichte nur insoweit berücksichtigt als sie im Wert von δ zum Ausdruck kommt. Die erwähnte Unsicherheit in der Festsetzung eines Wertes Γ_1 , der das turbulente Ablöseprofil kennzeichnen soll, ist daher erklärlich.

G r u s c h w i t z vermutete nun, dass es besser sein wird, die turbulenten Geschwindigkeitsprofile durch eine weiter weg von der Wand vorhandene, nicht so stark auf den örtlichen Wert von U' ansprechende Eigenschaft, z.B. durch den Wert der Geschwindigkeit u im Abstand $y = \delta$ von der Wand, zu charakterisieren. Diese Vermutung wurde durch die Feststellung bestätigt, dass sich die charakteristischen Werte $\frac{\delta^*}{\delta}$ der verschiedensten, bei Druckanstieg und Druckabfall gemessenen turbulenten Geschwindigkeitsprofile als ziemlich eindeutige Funktion des mit $u_{y=\delta}$ gebildeten Parameters

$$\eta = 1 - \left(\frac{\tilde{u}}{u} \right)_{y=\delta}^2 \quad \dots \quad (30)$$

darstellen lassen, Bild 5, was hinsichtlich des Formparameters Γ_1 in weit geringerem Masse der Fall ist, Bild 6.⁷⁾ Es muss jedoch bemerkt werden, dass auch dieser Formparameter η die Vorgeschichte des Geschwindigkeitsprofils (zu deren vollständiger Erfassung eben ein Parameter nicht ausreichen kann) auch nur näherungsweise wiedergibt.

Die Vorteile dieses Formparameters η müssen nun allerdings mit dem Hinzutreten einer besonderen Differentialgleichung erkauft werden, die neben der zur Bestimmung von

⁷⁾ Es ist denkbar, dass der Gruschwitzsche Gedankengang auch bei der Anwendung auf die laminare Reibungsschicht Vorteile bietet. Zur Aufstellung einer Differentialgleichung (31) oder (31b) entsprechenden Beziehung für den Formparameter η können in diesem Fall anstelle von Messungen auch genaue Berechnungen der Geschwindigkeitsprofile für verschiedenartige äussere Geschwindigkeitsverteilungen $U(s)$ nach dem Verfahren von H. G ö r t l e r [44] oder K. S c h r ö d e r [40] dienen. Untersuchungen in dieser Richtung sind eingeleitet.

nach wie vor unerlässliche Differentialgleichung (3) zu lösen ist. Gruschwitz fand aus Messungen das Gesetz

$$\frac{\eta}{q} \frac{dq}{ds} = c\eta - d, \quad (31)$$

wobei

$$q = \frac{\rho}{2} U^2,$$

$$g_{y=s} = p + \frac{\rho}{2} \tilde{u}_{y=s}^2 = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 - \frac{\rho}{2} U^2 \eta \quad (32)$$

(= Gesamtdruck längs einer Stromlinie im Wandabstand $y = s$) ist und die Konstanten c und d die Werte

$$c = 0,00894$$

$$d = 0,00461$$

haben.

Mit Berücksichtigung von (32) lässt sich (31) auch wie folgt schreiben:

$$\eta' + \eta \left[\frac{0,00894}{s} + 2 \frac{U'}{U} \right] = \frac{0,00461}{s} \quad (31a)$$

Mit Hilfe dieser Differentialgleichung kann man somit den Verlauf von η abhängig von der äusseren Geschwindigkeitsverteilung $U(s)$ bestimmen, nachdem man vorher den Verlauf von $s(s)$ mit der Karmanschen Integralbedingung (3) ermittelt hat.

Gruschwitz schreibt Gl. (3) zu diesem Zweck in der Form

$$\frac{\tau_0}{s U^2} = \eta' + \eta \frac{U'}{U} \left(\frac{\delta^*}{s} + 2 \right) \quad (3a)$$

Hierin ist $\frac{\delta^*}{s}$, solange η noch nicht ermittelt ist, unbekannt ebenso $\frac{\tau_0}{s U^2}$. Es zeigte sich nun, dass es für die Berechnung einer guten ersten Näherung von $s(s)$ genügt, konstante Mittel bzw. Näherungswerte für $\frac{\delta^*}{s}$ und $\frac{\tau_0}{s U^2}$ einzusetzen, z.B. $\frac{\delta^*}{s} = 1,5$

und $\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,002$. Mit der so gewonnenen ersten Näherung $\vartheta_1(s)$ kann nun nach Gl. (31a) eine erste Näherung für den Formparameter η bestimmt werden. Mit dieser lässt sich die Berechnung von ϑ noch etwas verbessern, indem man die Veränderung von $\frac{\delta^*}{\vartheta}$ mit η nach Bild 5 berücksichtigt. Gleichzeitig kann man mit $\vartheta_1(s)$ die Abschätzung von $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$ nach (6d) verbessern.

Zur Lösung der Differentialgleichungen (3a) und (31a) schlägt Gruschwitz ^{2a)} C z u b e r s c h e Verfahren [4] vor.

Die Berechnung von $\vartheta(s)$ beginnt man im Umschlagpunkt ⁸⁾ aus Stetigkeitsgründen mit dem für die laminare Reibungsschicht an dieser Stelle errechneten Wert ϑ . Als Anfangswert für den Formparameter η wäre nach Messungen an sich der Wert 1,0 anzusetzen. Gruschwitz fand jedoch, dass die berechneten $\eta(s)$ - Kurven in ihrem weiteren Verlauf am besten mit den zugehörigen Messungen übereinstimmen, wenn die Rechnung mit dem Wert $\eta = 0,1$ beginnt.

Mit der Frage des günstigsten Anfangswertes von η im Umschlagpunkt hat sich u.a. A. K e h l befasst, auf dessen Arbeit wir nun in folgendem Abschnitt eingehen wollen.

4.) Das Verfahren von K e h l .

Die Messungen von K e h l [3], die sich in erster Linie mit dreidimensionalen Reibungsschichtströmungen befassten, lieferten nebenbei noch das bemerkenswerte Ergebnis, dass die von Gruschwitz aufgestellte Differentialgleichung (31a) nur für einen bestimmten Bereich von Reynoldsschen Zahlen (etwa von $Re_\lambda = 700$ bis 5000) gilt. Kehl fand, dass sich der bis etwa $Re_\lambda = 30000$ untersuchte Re-Zahl-Einfluss dadurch gut erfassen lässt, dass an Stelle der Konstanten $d = 0,00461$ in Gleichung (31) die in Bild 7 wiedergegebene Funktion $d(Re_\lambda)$ gesetzt wird. Kehl konnte ferner zeigen,

⁸⁾ Ueber die Berechnung des Umschlagpunktes siehe z.B. [16]

dass man die Berechnung des Formparameters η auch mit dem physikalisch richtigeren Wert $\eta = 1,0$ beginnen und damit auch im Umschlagbereich gute Uebereinstimmung mit der Messung erreichen kann, wenn man die Funktion $d(Re_{\lambda})$ im Gebiet kleiner Re_{λ} - Zahlen unter 10^3 (wie sie im Anschluss an den Umschlagpunkt praktisch auftreten) stark verkleinert, so dass d dem Gesetz

$$d = \frac{0,0164}{\log Re_{\lambda}} - \frac{0,85}{Re_{\lambda} - 300} \quad (32a)$$

folgt. Wie Kehl schon vermutete, versagt diese Formel (η steigt über 1,0 hinaus, anstatt abzufallen), wenn Re_{λ} im Umschlagpunkt kleiner als etwa 300 wird, was bei Tragflügelprofilen und üblichen Re -Zahlen sehr häufig der Fall ist. Aus Abbildung 27 der Kehlschen Arbeit, die eine Gegenüberstellung der Rechenergebnisse für η nach den ursprünglichen Gruschwitzverfahren mit $\eta_{\text{Anfang}} = 0,1$ und dem Kehlschen $\eta_{\text{Anfang}} = 1,0$ und Benutzung von Gl. (32a) mit der Gruschwitzschen Messung wiedergibt, kann ferner geschlossen werden, dass das zweite Glied der Gl. (32a) auch dann unbrauchbar wird (d und damit auch η werden zu klein), wenn ausserhalb des Umschlagbereiches infolge eines Druckabfalles wieder kleine Re_{λ} - Zahlen auftreten. Der von Kehl gewählte schroffe Abfall der Kurve $d(Re_{\lambda})$, Bild 7, stellt offenbar eine Anpassung an die im Anschluss an den Umschlagpunkt auftretenden Strömungsgesetze bei nicht voll ausgebildeter Turbulenz dar, die dann bei voll ausgebildeter Turbulenz fehlerhaft wird. Uns erscheint es sinnvoller, den Verlauf von $d(Re_{\lambda})$, solange er nicht durch Messungen genauer belegt ist, unter Verzicht auf den Anfangswert $\eta = 1,0$ auf den Strömungszustand mit voll ausgebildeter Turbulenz abzustimmen. Dieser Forderung dürfte (nach der in Bild 16 wiedergegebenen Rechnung zu schliessen) der in Bild 7 gestrichelt eingezeichnete Verlauf von $d(Re_{\lambda})$ genügen.

Mit der Frage des Ablöse Kriteriums hat sich die Arbeit von Kehl nicht befasst.

5.) Neue Verfahren.

a) Aufgabenstellung.

Die graphische Lösung der Gruschwitzschen Differentialgleichungen (3a) und (31a) für ϑ und η nach dem Czuber'schen Verfahren, ist verglichen mit dem in Abschnitt II 3b beschriebenen Rechnungsgang für die laminare Reibungsschicht ziemlich umständlich, vor allem dann, wenn man zur Berücksichtigung des Blasius'schen Schubspannungsgesetzes (6a) eine zweite Näherung für ϑ zu berechnen hat.

Da diese Verfahren für die Berechnung des Höchstauftriebsbeiwertes von Tragflügeln [16] eine verhältnismässig häufige Anwendung erfahren, sind Vereinfachungen besonders erwünscht. Im Nachfolgenden werden solche Vereinfachungen entwickelt, die an die Verfahren von B u r i und K e h l anknüpfen und im übrigen die Gedankengänge benutzen, die bei dem Rechenverfahren für die laminare Reibungsschicht wesentliche Vereinfachungen ermöglichten.

b) Vereinfachte Berechnung von ϑ mit Berücksichtigung des Blasius'schen Schubspannungsgesetzes.

Wir gehen aus von der für die laminare wie für die turbulente Reibungsschicht in gleicher Weise geltende Schreibweise der Karmanschen Differentialgleichung des Impulses (12a)

$$\frac{d\left(\frac{\vartheta^2}{r}\right)}{ds} = \frac{f(\lambda^*)}{u} = \frac{2\varepsilon^* - 2\lambda^*\left(2 + \frac{\delta^*}{x}\right)}{u} = z^* \quad (12a)$$

mit

$$\varepsilon^* = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\rho u^2} Re_x \quad (15a)$$

und

$$\lambda^* = \frac{u' x^2}{r} = u' z^* \quad (10a)$$

Als vereinfachende Massnahme, die die Genauigkeit der Rechnung nur in sehr geringem Masse beeinträchtigt, hat sich das Einführen eines unveränderlichen Mittelwertes für $\frac{\delta^*}{\delta}$ erwiesen. $\frac{\delta^*}{\delta}$ nimmt in der Regel Werte zwischen 1,2 und 1,8 an. Wir wählen daher (wie schon Gruschwitz) für $\frac{\delta^*}{\delta}$ den Mittelwert 1,5 (Das Einführen eines Mittelwertes für $\frac{\delta^*}{\delta}$ entspricht etwa der Annäherung der empirischen Funktion $\frac{d}{ds} (\sqrt[3]{\text{Re}_\delta})$ durch die Gerade $a_1 - b_1 \sqrt[3]{1}$, wie sie B u r i benützte).

Für die Veränderung der Wandschubspannung mit der Re-Zahl nehmen wir die Blasius'sche Beziehung (6 d) an, setzen also

$$\varepsilon^* = 0,01255 \text{Re}_\delta^{3/4} \quad (15c)$$

Damit geht (12a) über in die B e r n o u l l i s c h e Differentialgleichung

$$z^{*1} + 7,0 \frac{U'}{U} z^* - \frac{0,0251}{U^{1/4} \nu^{3/8}} z^{*3/8} = 0 \quad (12b)$$

Mit der Substitution

$$Z = z^{*5/8}$$

erhält man die lineare Differentialgleichung

$$Z' + 4,377 \frac{U'}{U} Z - \frac{0,0157}{U^{1/4} \nu^{3/8}} = 0$$

und deren Lösung

$$Z = Z_1 \left[\left(\frac{U_1}{U} \right)^{4,377} + \frac{0,0157}{(\sqrt[3]{\text{Re}_\delta^{1/4}})_1} \frac{\int_{s_1}^s U^{4,127} ds}{U_1^{4,127}} \right]$$

Um das Integral in dieser Gleichung ein für alle mal auswerten zu können, setzen wir wieder, wie im Fall der laminaren Reibungsschicht, abschnittsweise linearen Verlauf von U (s) an (Gl. 25) und erhalten schliesslich die Beziehung

$$\frac{(\sqrt[3]{\text{Re}_\delta^{1/4}})_2}{(\sqrt[3]{\text{Re}_\delta^{1/4}})_1} = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{1/4} \cdot \left[\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{4,377} + 0,00306 \frac{\left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{0,75} - \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{4,377}}{\left(\frac{U_2}{U_1} - 1,0 \right) (\sqrt[3]{\text{Re}_\delta^{1/4}})_1} \Delta s \right] \quad (33)$$

(Index 1 = Anfang, Index 2 = Ende eines Abschnittes $\Delta s = s_2 - s_1$), die grosse Aehnlichkeit mit der für die laminare Reibungsschicht abgeleiteten Beziehung (24c) hat. Sie unterscheidet sich, wenn man von den anderen Potenzen des Verhältnisses $\frac{U_1}{U_2}$ und dem Zahlenfaktor in der Klammer absieht, von der Beziehung (24c) nur dadurch, dass die Grösse $\vartheta (Re_\lambda)^{1/4}$ anstelle von ϑRe_λ als Parameter auftritt - ein Unterschied, in dem die Verschiedenartigkeit der laminaren und turbulenten Wandschubspannungsgesetze zum Ausdruck kommt - (bei der laminaren Reibungsschicht ist $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$ umgekehrt proportional Re_λ , bei der turbulenten nach dem angenommenen Blasius'schen Gesetz umgekehrt proportional $Re_\lambda^{1/4}$).

Für (33) können wir wieder ein Nomogramm mit den Skalen $\frac{U_2}{U_1}$, $\frac{\Delta s}{(\vartheta Re_\lambda^{1/4})^2}$ und $\frac{(\vartheta Re_\lambda^{1/4})^2}{(\vartheta Re_\lambda^{1/4})^2}$ entwerfen, das in Bild 8 und 9 in zwei verschiedenen Maßstäben wiedergegeben ist. Um $\frac{\vartheta}{1}$ zu erhalten, bildet man zunächst die Werte $\frac{\vartheta}{1} Re_\lambda^{1/4} \cdot \frac{U}{U_1} \cdot \frac{\infty}{\vartheta} = Re_\lambda^{5/4}$ und liest dazu aus dem Nennnomogramm auf Bild 9 die Werte $Re_\lambda^{1/4}$ ab. Dann folgt $\frac{\vartheta}{1}$ aus $\frac{\vartheta}{1} Re_\lambda^{1/4}$ durch Division mit $Re_\lambda^{1/4}$. Die numerische Lösung praktischer Aufgaben wird durch diese Nomogramme gegenüber dem Gruschwitzschen Iterationsverfahren ausserordentlich vereinfacht.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den einfacheren Fall $\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \text{konst.} = K$ behandeln. Die Karman'sche Integralbedingung führt hier zu der Bernoullischen Differentialgleichung

$$z^{*'} + 7 \frac{U'}{U} z^* - \frac{2K}{U^2} \sqrt{z^*} = 0$$

Mit der vereinfachenden Annahme $U = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{s_2 - s_1} s$ lautet ihre Lösung in einer der Gl. (33) entsprechenden Form

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{3,5} + \frac{1}{4,5} \frac{\frac{U_2}{U_1} - \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{3,5}}{\frac{U_2}{U_1} - 1} \frac{K \Delta s}{U_1} \quad (34)$$

Man kann für diese Gleichung wieder ein Nomogramm entwerfen, diesmal mit den Skalen $\frac{U_2}{U_1}$, $\frac{K \Delta s}{\vartheta_1}$, $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$.

c) Vereinfachte Berechnung des Formparameters η mit Berücksichtigung der Re-Zahl nach Messungen von K e h l .

Für den Formparameter η besteht nach K e h l näherungsweise die Differentialgleichung

$$\frac{\nu}{q} \frac{d q_{x=\nu}}{d s} = c \eta - d(Re_x)$$

oder (mit Gl. (31a))

$$\eta' + \eta \left[\frac{c}{\nu} + 2 \frac{U'}{U} \right] = \frac{d(Re_x)}{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (31b)$$

Hierbei hat ^{wieder} c den Wert 0,00894. d ist in dem Bereich $Re_x = 700$ bis etwa 30 000 durch Messungen von Kehl und Gruschwitz gegeben. Die Extrapolation von d zu kleineren Re_x -Werten unter 700 wählen wir aus den in Abschnitt III 4) näher dargelegten Gründen entsprechend der gestrichelten Kurve in Bild 7 .

Um die Differentialgleichung (31b) für η in eine für die praktische Rechnung bequeme Integralform überführen zu können, nehmen wir stückweise linearen Verlauf von ν über s an, setzen also

$$\nu = \nu_1 + \frac{\nu_2 - \nu_1}{s_2 - s_1} (s - s_1) \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und drücken $\frac{U'}{U}$ mit Hilfe der Karmanschen Integralbedingung durch ν und ν' aus. Wir erhalten dann zunächst mit (3a), S.19, (6a), S.15, und $\delta^*/x = 1,5$

$$\eta' + \eta \left[\frac{0,00894}{\nu} + \frac{0,01255 Re_x^{-1/4} - \nu'}{1,75 \nu} \right] = \frac{d(Re_x)}{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

und nach der Integration, bei der wir der Einfachheit halber noch $Re_{x_1} = Re_{x_2} = \text{konst.}$ setzen, die Beziehung

$$\eta_2 = \eta_1 P\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}, \frac{\Delta_1}{\nu_1}, \overline{Re_x}\right) + Q\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}, \frac{\Delta_1}{\nu_1}, \overline{Re_x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Hierbei ist

$$P = \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^m$$

$$Q = -d(Re_\eta) \frac{\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^m - 1}{m\left(\frac{\eta_2}{\eta_1} - 1\right)} \frac{\Delta s}{\eta_1}$$

mit

$$m = -0,5715 + \frac{0,00894 + 0,00714 \overline{Re}_\eta^{-1/4}}{\frac{\eta_2}{\eta_1} - 1} \frac{\Delta s}{\eta_1}$$

Die Funktionen P und Q lassen sich ein für alle mal berechnen und graphisch darstellen. Da drei unabhängige Veränderliche zu berücksichtigen sind, führt eine solche graphische Darstellung an sich zu einer verhältnismässig grossen Zahl von Kurvenblättern. Es zeigte sich jedoch, dass mit guter Näherung, offenbar infolge des kleinen Einflusses von Re_η , eine Aufspaltung der Funktionen P und Q in der Form

$$P = P_I\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}, \frac{\Delta s}{\eta_1}\right) + P_{II}\left(\frac{\Delta s}{\eta_1}, \overline{Re}_\eta\right) \cdot P_{III}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}, \frac{\Delta s}{\eta_1}\right) \dots (37a)$$

$$Q = Q_I\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}, \frac{\Delta s}{\eta_1}\right) + Q_{II}\left(\frac{\Delta s}{\eta_1}, \overline{Re}_\eta\right) \dots (37b)$$

möglich ist, so dass man für die Darstellung von P mit zwei und von Q mit drei Kurvenblättern auskommt, Bild 10 bis 14. Die den Einfluss der Re-Zahl enthaltenden Funktionen P_{II} und Q_{II} betragen meist nur wenige Prozent der Funktionen P_I und Q_I . Die Funktion P_{III} ist gleich 1,0 für $\frac{\eta_2}{\eta_1} = 1,5$ (ein Wert, der bei üblichen Schnittgrössen am häufigsten auftritt).

Da P_{III} nur als Faktor der kleinen Korrekturgrösse Q_{II} auftritt, begeht man nur einen geringen Fehler, wenn man der einfacheren Rechnung wegen $P_{III} = 1$ setzt. Vernachlässigt man noch P_{II} und Q_{II} , so hat man ungefähr den Fall der 1. Näherung des Gruschwitz-Verfahrens mit $d=0,0046 = \text{konst.}$

Im übrigen ist eine Ungenauigkeit der 3. Kommastelle von η belanglos, da, wie wir feststellten, auch die Grundlagen der Theorie der turbulenten Reibungsschicht noch unsicher sind.

Aus den in Bild 15 und 16 wiedergegebenen Rechenbeispielen ist der Grad der Verbesserung ersichtlich, der mit den neuen Rechenverfahren gegenüber den Ergebnissen der 1. Näherung des Gruschwitz-Verfahrens erreichbar ist.

Das Schema für die Berechnung der turbulenten Reibungsschicht ist nachstehend wiedergegeben.

①	②	③	④	⑤ = $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$	⑥	⑦ = $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$	⑧ = $2 \cdot \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$	⑨	⑩ = $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$
s/l	U/U_∞	$\Delta s/l$	U_2/U_∞	$\frac{(\Delta s/l)_2}{(\sqrt{Re_2})^{1/4}}$	$\frac{(\Delta s/l)_2}{(\sqrt{Re_2})^{1/4}}$	$\frac{\Delta s}{l} Re_1^{1/4}$	$Re_1^{5/4}$	$Re_1^{1/4}$	δ/l
					aus Bild 8 u. 9			aus Bild 9	Anfangs-Wert aus lamin. Rechnung

⑪ = $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$	⑫ = $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$	⑬	⑭	⑮	⑯	$\eta_1 \cdot [⑬ + ⑭] + ⑮ + ⑯$
$\frac{\delta_2}{\delta_1}$	$\frac{\Delta s}{\delta_1}$	P_I	P_{II}	Q_I	Q_{II}	η
		aus Bild 10 bis 15				$\eta = 0,1$ im Umschlag-Pkt

$$Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$$

$$Re_\delta = \frac{U_\delta \delta}{\nu}$$

d) Ueber das Ablösekriterium für die turbulente Reibungsschicht.

Nach Gruschwitz löst die turbulente Reibungsschicht dann ab, wenn der Formparameter η den Wert 0,8 überschreitet. Später beobachtete H. Schmidbauer [14], dass bei schwachem Druckanstieg im Ablösegebiet selbst bei einem Wert $\eta = 0,95$ nach keine Ablösung einzutreten braucht.

In einer früheren Arbeit [16] wurde versucht, aus Druckverteilungsmessungen am Profil NACA 23015 im Wasserkanal, Bild 17 bis 19, bei denen die Abhängigkeit der Ablösestelle der turbulenten Reibungsschicht vom Anstellwinkel und damit vom Druckgradienten mittels Farbfaden beobachtet werden konnte, Bild 20 bis 22, einen empirischen Zusammenhang zwischen η_{Kr} und dem Druckgradienten aufzustellen. Der Verlauf des Formparameters η längs der Profilabwicklungs wurde, da bei dieser (aus anderem Anlass durchgeführten) Messung keine Reibungsschichtgrößen gemessen worden waren, auf rechnerischem Weg nach dem vereinfachten Gruschwitz-Verfahren

ren [1] mit den Voraussetzungen $\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,002$ und $\delta^*/\theta = 1,5$ ermittelt, Bild 23. Dabei ergab sich, wenn man für η_{Kr} die Grenzen 0,8 und 1,0 bei den Druckanstiegen unendlich bzw. 0 annimmt, in roher Näherung die Beziehung

$$\eta_{Kr} = 0,8 + \frac{0,2}{1 - 0,5 \frac{d(q/q_0)}{d(s/l)}}$$

Die Berechnung von η (s) wurde nun mit dem neuen, den Einfluss der Re-Zahl nach K e h l erfassenden Verfahren wiederholt. Als Re-Zahl wurde im Bereich der turbulenten Reibungsschicht der Wert $Re_{eff} = 1,6$ (Turbulenzfaktor des Wasserkanals = 2,0) eingesetzt. Bild 24 zeigt das Ergebnis. Hier nach wird für η_{Kr} ein vom Druckgradienten unabhängiger Wert

$$\eta_{Kr} = 0,82$$

nahegelegt. Dieses Ergebnis bestätigt die Annahme von Gruschwitz, steht aber im Widerspruch zu den Beobachtungen von Schmidbauer.

Völlige Klarheit können hier nur neue systematische Reibungsmessungen schaffen. Solche Messungen werden zur Zeit von H. W i e g h a r d t im Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, durchgeführt.

Es sei nur noch bemerkt, dass bei der Berechnung von $c_{a \max}$ unter Verwendung des Verfahrens des Abschnittes III 5 mit diesem Ablöse Kriterium bei verschiedenartigen Profilen (NACA 0009, 23012, Mustang-Profil) gute Uebereinstimmung mit Messungen erzielt wurde. Ueber diese Rechnungen wird gesondert berichtet.

e) Erprobung des Formparameters $\Gamma_1 = \frac{U'}{U} + Re \delta^{1/4}$.

Die Verwendung des von B u r i vorgeschlagenen Formparameters $\Gamma_1 = \frac{U'}{U} + Re \delta^{1/4}$ hätte den grossen Vorteil, dass man sich wie bei der laminaren Reibungsschicht zur näherungsweisen Bestimmung aller wesentlichen Kenngrössen der turbulenten Reibungsschicht auf die Lösung einer einzigen Diffe-

rentialgleichung, nämlich der Karmanschen Integralbedingung des Impulses beschränken kann. Diese Lösung liefert zunächst die Grösse $\nu \text{Re}_\delta^{1/4}$, aus der man dann durch blosses Multiplizieren mit den örtlichen Werten $\frac{U'}{U}$ den Formparameter Γ_1 erhält.

Trotz der in Abschnitt III 3 näher begründeten Bedenken gegen die Verwendung dieses Formparameters Γ_1 , kommt ihm daher doch eine gewisse Bedeutung für schnell durchzuführende Ueberschlagsrechnungen zu.

Wenn wir den Gruschwitzschen Parameter η als Brauchbar voraussetzen (hierzu sind wir nach den bisherigen Erfahrungen mit diesem Parameter berechtigt), so können wir die Eignung von Γ_1 zur Kennzeichnung turbulenter Geschwindigkeitsprofile u.a. auch dadurch prüfen, dass wir den Verlauf von Γ_1 und η für verschiedene Potentialgeschwindigkeits-Verteilungen $U(s)$ berechnen und feststellen, ob und in wie weit Γ_1 als eindeutige Funktion von η aufgefasst werden kann. In Bild 25 ist der aus einigen verschiedenartigen Beispielen errechnete Zusammenhang zwischen Γ_1 und η dargestellt. Hier, nach ist Γ_1 , wie schon aus der Auftragung von $\frac{\delta^*}{\eta}$ über Γ_1 zu erkennen war, ^{Bild 6)} nur wenig als Parameter der turbulenten Geschwindigkeitsprofile geeignet (die über der eingezeichneten Mittelkurve liegenden Rechenpunkte entsprechen den Fällen mit starkem Druckanstieg im vorderen Profilteil).

f) Das Ablösekriterium von A c k e r e t .

Abschliessend sei noch ein sehr einfaches, auf Reibungsschicht-Berechnungen verzichtendes, aber dabei in vielen Fällen merkwürdig genaues Ablösekriterium besprochen, das J. A c k e r e t vor kurzem ohne nähere Begründung angegeben hat [23]. A c k e r e t konnte feststellen, dass turbulente Ablösung in den verschiedenen Fällen dann eintrat, wenn das Verhältnis

$$\frac{U_{\max}^2 - U_H^2}{U_{\max}^2} = 1 - \left(\frac{U}{U_{\max}} \right)^2$$

etwa den Wert 0,7 bis 0,8 überschritt, wobei U_{\max} die höchste am Profil vorhandene Geschwindigkeit (Saugspitze) und U_H die Geschwindigkeit an der Hinterkante ist.

über die in Abschnitt V Näheres ausgeführt ist, braucht man den Wert des Formparameters η_H an der Profilhinterkante. Es genügt jedoch eine einigermaßen richtige Abschätzung von η_H . Eine solche ohne Reibungsschichtberechnungen zu gewinnende Abschätzung liefert aber der in Bild 27 gezeichnete (aus Bild 26 entnommene) Zusammenhang zwischen h und η , der damit ein recht vorteilhafte Nutzanwendung erfüllt.

Dass der Formparameter h , wenn auch mit einiger Vorsicht, zu einer Abschätzung des Höchstauftriebsbeiwertes, ausgehend von theoretisch nach T h e o d o r s e n - P i n k e r t o n [20] gerechneten Druckverteilungen, benutzt werden kann, sei an einigen Beispielen gezeigt. Man muss hierbei noch beachten, dass die bei diesen Druckverteilungsrechnungen vernachlässigte Profilverdickung durch die Reibungsschicht $c_{a \max}$ -erhöhend wirkt (die entwölbende Wirkung der Reibungsschicht auf die Druckverteilung ist nach dem Gedanken von P i n k e r t o n [19] erfasst). Diese bei verschiedenartigen Profilen als ungefähr gleich gross gefundene Wirkung lässt sich bei der Abschätzung von $c_{a \max}$ dadurch überschlägig berücksichtigen, dass man den Wert h_{kr} um einen empirisch zu ermittelnden Betrag erhöht. Wir fanden bei einer ganzen Reihe unterschiedlicher Profile bis zu einem Dickenverhältnis von etwa 0,15 (bei Re-Zahlen von etwa $1,0 \cdot 10^6$ bis $3 \cdot 10^6$) $c_{a \max}$ dann ungefähr erreicht, wenn h an der Stelle $x/l = 0$, den Wert 0,89 ($\approx \eta_{kr}$ nach Gl. (42)) annimmt ⁹⁾, vergl. Zahlentafel 2 . Bei dickeren Profilen versagt dieses Kriterium; es liefert dann zu hohe $c_{a \max}$ -Werte, offenbar deshalb, weil der $c_{a \max}$ -erniedrigende Einfluss des mit der Profildicke wachsenden Hinterkantenwinkels nicht erfasst wird (vergl. [16]).

In Bild 28 und 29 sind als Beispiele die Kurven $h(s/l)$ und $h(c_\alpha)$ für die Profile 23012 und „Mustang“ wieder gegeben.
 $x/l=0,9$

Die hier beschriebenen Rechenverfahren für die laminare und turbulente Reibungsschicht werden wohl hauptsächlich im Zusammenhang mit einer rechnerischen Ermittlung des Höchstauftriebs- und Widerstandsbeiwertes von Tragflügelprofilen zur Anwendung gelangen. Es soll daher die in früheren Arbeiten [16][17][18] ausführlich beschriebene Lösung dieser Aufgaben in einem Anhang kurz dargestellt werden.

Auf eine Behandlung des von H. S c h m i d b a u e r

⁹⁾ Vergl. hierzu auch die Ausführungen über die genauere Berechnung von $c_{a \max}$ im Anhang.

Z a h l e n t a f e l l. 2. Vergleich der mit dem Ablöse-
kriterium nach A c k e r e t ermittelten $c_{a \max}$ -Werte
mit Messungen.

Profil	$c_{a \max}$ mit $h_{Kv}=0,89$	$c_{a \max}$ Messung		Bemerkungen
		Druck-Verf.	Wägung	
NACA 0009	0,92		0,88	$Re_{eff}=3,41 \cdot 10^6$ (NACA Rep. 610)
" 0009-E4	0,76		0,76	$Re=1,0 \cdot 10^6$ (AVA-Messung)
" 23009	1,29	1,58	1,34	
" 23012	1,56	1,55	1,42	
" 23015	1,65	1,50 ^{x)}	1,35 ^{x)}	DVL-Messung
" 23018	2,00	1,41	1,28	} $Re \approx 2,7 \cdot 10^6$ [24][25]
" 23021	1,80	1,35	1,25	
" Mustang"-Profil	1,25	1,25	1,19	DVL-Messung } Dickenverh. 0,136

x) interpoliert

[14] untersuchten Einflusses der Wandkrümmung auf die Entwicklung der turbulenten Reibungsschicht wurde im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, da dieser Einfluss bei den an normalen Profilen im Gebiet der turbulenten Reibungsschicht vorkommenden charakteristischen Verhältniszahlen Impulsverlustdicke δ /Krümmungsradius r vernachlässigbar ist (solange δ/r kleiner als etwa 0,002 ist). Konvexe Krümmung bedingt kleinere Werte δ , aber höhere Ablösegefahr bei Druckanstieg als im Fall ohne Krümmung (die Reibungsschicht entwickelt sich infolge des erschwerten Impulsaustausches zum laminaren Zustand hin, der weniger Druckanstieg verträgt).

IV. Anhang. Die Berechnung des Höchstauftriebsbeiwertes von Tragflügelprofilen

A) Allgemeine Uebersicht

Eine Rechnung dieser Art gliedert sich grundsätzlich in folgende Abschnitte:

- 1) Berechnung der potential-theoretischen Druckverteilung
- 2) Berechnung der zugehörigen Reibungsschicht mit
 - a) Abschätzung des Umschlagpunktes laminar/turbulent
 - b) Berechnung der turbulenten Ablösestelle
 - c) Zuordnung von $c_{a \max}$ und Ablösestelle
- 3) Bestimmung der Zirkulationsverringerung durch die Reibungsschicht (Bestimmung des richtigen Verlaufs von $c_a (\alpha_\infty)$)
- 4) Bestimmung der Aenderungen der Druckverteilung, die sich aus der Zirkulationsverringerung und aus der Verdickung des Profils durch die Reibungsschicht ergeben.
- 5) Verbesserung der Reibungsschicht-Berechnung auf der Grundlage der verbesserten Druckverteilung u.s.w.

Man kann somit nur durch schrittweise Verbesserung von Näherungsergebnissen der einzelnen Abschnitte zum Ziel gelangen.

Durch Verwendung geeigneter 1. Näherungen, insbesondere für die Rechnung Punkt 3 und 4 und Zusammenfassung der Rechnung von Punkt 1 und 4 nach dem Grundgedanken von R. P i n k e r t o n (NACA-Rep. 563) kommt man jedoch stets mit zwei Näherungsschritten aus.

Für die praktische Durchführung der Rechnung im Zusammenhang mit den in diesem Bericht beschriebenen neuen Rechenverfahren ergibt sich im einzelnen etwa nachstehendes Programm:

B. Profile ohne Klappen

1) Berechnung der Druckverteilung

nach dem Verfahren von T h e o d o r s e n - P i n k e r t o n [20] bei verschiedenen Anstellwinkeln α_{∞} . Hierzu ist im einzelnen folgendes zu bemerken:

Für den Auftriebsbeiwert c_a gilt die Beziehung

$$c_a = \frac{4\pi R}{l} \sin(\alpha_{\infty} + \gamma - \varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_0) \dots\dots\dots (39)$$

Die Grössen $\frac{R}{l}$, γ und ε_0 sind mit der geometrischen Form des Profils gegeben. Die Grösse $\Delta\varepsilon_0$ bringt den entwölbenden Einfluss der Reibungsschicht zum Ausdruck. In erster Näherung kann man

$$\Delta\varepsilon_0^{(1)} = 0,2(\alpha_{\infty} + \gamma - \varepsilon_0) [1 - 0,026(16 - \delta^{\circ})] \dots\dots\dots (40)$$

setzen, wo δ° den ganzen Hinterkantenwinkel bedeutet. Nun sind alle ^{Größen} zur Durchführung einer Druckverteilungsrechnung bekannt, die nach P i n k e r t o n den Einfluss der Reibungsschicht auf die Druckverteilung mit guter Näherung erfasst, soweit er sich in einer Entwölbung des Profils äussert (es bleibt dann noch ein profilverdickender Einfluss zu berücksichtigen, vergl. Pkt. 4, Seite 36)

2) Berechnung der Reibungsschicht auf Saug- und Druckseite

a) Laminare Reibungsschicht, nach Abschnitt II 4 b)

b) Umschlagpunkt laminar/turbulent

Als frühester Umschlagpunkt kann bei aerodynamisch glattem Profil der Indifferenzpunkt (die Störgeschwindigkeiten werden ^{hier} weder gedämpft noch angefacht) gelten. Er tritt auf, wenn Re_{θ} einen kritischen, von λ abhängigen Wert ($Re_{\theta_{kr}}$) überschreitet. In Bild 30 ist der Zusammenhang zwischen $Re_{\theta_{kr}}$ und λ^* nach S c h l i c h t i n g [26] dargestellt.

Man findet mit Hilfe dieses Bildes den Wert λ^* und, da $\lambda^*(s)$ mit der Rechnung Pkt. 2 a) vorliegt, auch die Stelle s am Profil, an der Re_{kr} erreicht wird. Der Indifferenzpunkt liegt in der Regel in der Nähe des Druckminimums, dessen Lage man als gute Näherung für die früheste Umschlagstelle wählen kann.

Als spätester Umschlagpunkt kann die laminare Ablösestelle angesetzt werden, die man etwa durch $\lambda^* = -0,03$ kennzeichnen kann.

c) Turbulente Reibungsschicht nach Abschnitt III 5b) und c)

Man rechnet zunächst nur den Verlauf der Grösse $\frac{\delta}{l}(Re_\delta)^{1/4}$ bis zur Stelle $x/l = 0,9$ auf Saug- und Druckseite mit Hilfe der Nomogramme Bild 8 und 9, sowie den Wert $\frac{\delta}{l}$ an dieser Stelle auf Saug- und Druckseite.

Wenn der Profilwiderstand nicht interessiert, kann man hierbei von einer mittleren Lage des Umschlagpunktes zwischen Indifferenzpunkt und laminarer Ablösestelle ausgehen. Hat man, entsprechend den Ausführungen des nachfolgenden Abschnittes 3), festgestellt, dass $|\Delta\epsilon_0^{(2)} - \Delta\epsilon_0^{(1)}| > 0,5^\circ$ ist, so ist die Berechnung des Formparameters η für etwa drei den (nach Abschnitt III 5f abgeschätzten) $c_{a \text{ max}}$ -Bereich überdeckende c_a -Werte anzuschliessen, und zwar nur auf der Saugseite, ausgehend von den beiden Grenzlagen des Umschlagpunktes oder (wenn man will) von einer mittleren Lage zwischen diesen Grenzen.

3) Bestimmung einer zweiten Näherung der Grösse $\Delta\epsilon_0$

Hierzu dient Bild 31. Es ist

$$\frac{\Delta\epsilon_0}{\alpha_e^2} = [1 - 0,026(16 - \delta')] \Phi; \quad \alpha_e' = \alpha_o + \gamma - \epsilon_o \quad \dots (41)$$

wobei Φ abhängig von den berechneten Grössen $\frac{\delta_S}{l}$ (Saugseite) und $\frac{\delta_D}{l}$ (Druckseite) an der Stelle $x/l = 0,9$ und von der Re-Zahl aus Bild 31 zu entnehmen ist. Φ wurde empirisch bestimmt.¹⁰⁾ In der Regel ist der Unterschied zwischen $\Delta\epsilon_0^{(1)}$ und $\Delta\epsilon_0^{(2)}$ kleiner als $0,5^\circ$. In diesen Fällen lohnt es sich nicht, die Druckverteilungsrechnung mit $\Delta\epsilon_0^{(2)}$ zu wieder-

¹⁰⁾ Vergl. hierzu [16] mit dortiger Fussnote 6). Das vorliegende Kurvenblatt für Φ , Bild 31, unterscheidet sich von dem dort angegebenen dadurch, dass es mit Benützung des neuen Rechenverfahrens für die turbulente Reibungsschicht (Abschnitt III 5 b) gewonnen wurde.

holen, da der Einfluss der hierbei sich ergebenden Änderungen der Druckverteilung auf die Reibungsschicht nur gering ist, sodass $\Delta \varepsilon_0^{(3)} \approx \Delta \varepsilon_0^{(2)}$ ist. Dagegen kann $\Delta \varepsilon_0^{(2)}$ zur Berichtigung des $c_a(\alpha_{\infty})$ - Verlaufs nach Gl. (39) benutzt werden.

4) Zuordnung von $c_{a \max}$ und Ablösestelle

Es hat sich als zweckmässig erwiesen, $c_{a \max}$ dann als erreicht zu betrachten, wenn der Formparameter η in dem Bereich von $x/l = 0$ bis 0,9 den Wert

$$\eta_{kr} = 0,82 + 0,09 x/l \quad \dots \quad (42)$$

überschreitet. Das empirisch ermittelte Zusatzglied $0,09 x/l$ berücksichtigt näherungsweise den $c_{a \max}$ - erhöhenden Einfluss der Profilverdickung durch die Reibungsschicht, der sich bei verschiedenen Profilen als ungefähr gleich gross erwiesen hat. Bild 32 zeigt einige Kurven η (4) für das Profil "Muschel" mit der Bestimmung von $c_{a \max}$ aus der Auftragung, $\eta(c_a)$.
 $x/l=0,9$

d) Profile mit Klappen ($l_{kl}/l \geq 0,2$; $\eta_{kl} \geq 45^\circ$)

- 1) Abschätzung des Verlaufs von $c_a(\alpha_{\infty})$ auf Grund von Messungen an ähnlichen Profilen, z.B. in der Form

$$c_a = k \sin(\alpha_{\infty} + \beta) ; \quad \beta = \text{Nullauftriebswinkel}$$

- 2) Berechnung der Druckverteilung des Profils mit Totwasser-Schwanzstück nach [21].
- 3) Berechnung der Reibungsschicht nur auf der Profilsaugseite, sonst wie für Profile ohne Klappen. Kriterium für $c_{a \max}$ wie dort.

V. Anhang. Die Berechnung des Profilwiderstandes

Die theoretische Berechnung des Profilwiderstandes hat durch eine vor einigen Jahren erschienene Arbeit von J. P r e t s c h [17] eine wesentliche Förderung erfahren. Es gelang P r e t s c h , den Profilwiderstand (Reibungs- und Druckwiderstand) ohne Vernachlässigung wesentlicher Einflüsse durch Reibungsschichtgrössen an der Profilhinterkante und durch die Potential-Strömungsgeschwindigkeit $\frac{U_H}{U_\infty}$ an dieser Stelle ausdrücken in der Form

$$C_{wp} = \left(\frac{\rho}{l}\right)_S \xi\left(\eta_H, \frac{U_H}{U_\infty}\right)_S + \left(\frac{\rho}{l}\right)_D \xi\left(\eta_H, \frac{U_H}{U_\infty}\right)_D \quad \begin{array}{l} S = \text{Saugseite} \\ D = \text{Druckseite} \\ H = \text{Hinterkante} \end{array} \quad (43)$$

Die Funktion $\xi\left(\eta, \frac{U}{U_\infty}\right)_H$ ist in Bild 33 dargestellt.

Bei der Anwendung dieser Formel in Verbindung mit theoretisch gerechneten Druckverteilungen stösst man zunächst auf die Schwierigkeit, dass diese Rechnung an der Profilhinterkante einen Staupunkt (d.h. $\frac{U_H}{U_\infty} = 0$), und nicht einen der Wirklichkeit entsprechenden, von null verschiedenen Wert $\frac{U_H}{U_\infty}$ liefert.

Nachprüfungen zeigten nun, dass man mit einer verhältnismässig rohen Abschätzung von $\frac{U_H}{U_\infty}$ auskommt ($\frac{U_H}{U_\infty}$ etwa gleich 0,8 bis 1,0, die kleineren Werte bei dünnen Profilen), wenn man nur die zu dem mehr oder weniger willkürlich abgeänderten Verlauf von $\frac{U}{U_\infty}$ (s/l) gerechneten Reibungsschichtgrössen $\left(\frac{\rho}{l}\right)_H$ und η_H in die Formel (43) einsetzt. Es genügt dabei, den Verlauf von $\frac{U}{U_\infty}$ (s/l) im Bereich $x/l = 0,9$ bis 1,0 abzuändern.

Eine weitere Schwierigkeit bei theoretischen Berechnungen des Profilwiderstandes liegt darin, dass es z.Zt noch nicht möglich ist, die Umschlagstelle laminar/turbulent, die den Wert der Reibungsschichtgrössen an der Hinterkante stark beeinflusst, mit erträglichem Zeitaufwand genau zu berechnen. Es ist jedoch möglich, den Bereich, in dem der Umschlagpunkt liegen wird, einigermaßen sicher abzugrenzen. Dies ist der Bereich zwischen dem Indifferenzpunkt und der laminaren Ablösestelle. (vergl. Abschnitt IV). Damit kann man z.Zt.

wenigstens einen Werte- Bereich für den Widerstand berechnen. Aus Verschiebungen dieses Wertebereichs bei vergleichen den Rechnungen für verschiedene Profile wird man dann i.d. auch auf eine verbessernde oder verschlechternde Wirkung bestimmter Formänderungen der Profile schliessen können.

Aus den bei einer Reihe von Profilen durchgeführten Vergleichen zwischen Rechnung und Messung scheint sich die Regel zu ergeben, dass der Profilwiderstand bei kleinen c_a -Werten (Schnellflug - c_a) mit der Annahme des Umschlagpunktes an der laminaren Ablösestelle richtig errechnet wird. Bei grossem c_a - Werte liefert dagegen die mit dem Indifferenzpunkt (\approx Druckminimum) als Umschlagpunkt durchgeführte Rechnung, wie es auch erwartet werden kann, bessere Uebereinstimmung mit Messungen.

Die Berechnung des Profilwiderstandes lässt sich mit geringem Mehraufwand an Zeit an die in Abschnitt IV beschriebene Berechnung von $c_{a \max}$ anschliessen. Man hat nur die dort bis $x/l = 0,9$ durchgeführte Berechnung der Reibungsschicht für den geänderten Verlauf von $\frac{U}{U_\infty} (s/l)$ bis $x/l = 1,0$ fortzusetzen (Zwischen $x/l = 0,9$ und $1,0$ kann man linearen Geschwindigkeitsverlauf voraussetzen; ein leichter Knick in $\frac{U}{U_\infty} (s/l)$ an der Stelle $x/l = 0,9$ schadet nichts).

In der nachstehenden Zahlentafel ist als Beispiel die Widerstandsberechnung für das "Mustang"-Profil bei einigen Anstellwinkeln wiedergegeben. Es ist daraus auch der geringe Einfluss des Verlaufs von $\frac{U}{U_\infty} (s/l)$ in der Nähe der Hinterkante auf c_{wp} ersichtlich.

Es sei noch erwähnt, dass man bei kleinen und mittleren c_a -Werten und insbesondere auf der Profildruckseite die etwas zeitraubende Berechnung des Formparameters η nach Abschnitt III 5c durch eine Abschätzung aus Bild 27 auf dem Weg über die sehr einfache Berechnung des Ackeretschen Formparameters $h = 1 - \left(\frac{U}{U_{\max}}\right)^2$ ersetzen kann, da der Einfluss von η auf die Funktion ξ nur gering ist, siehe Bild 33 (Eine Unsicherheit in η um $0,1$ bewirkt bei η -Werten unter $0,8$ einen Fehler in c_{wp} von weniger als 10%).

Mustang-Profil

Berechnung des Profilwiderstandes nach P r e t s c h mit theore -
tischer Druckverteilung und experimentellen Umschlagpunkten

$$\left(\text{Voraussetzung } \frac{\omega}{\rho u^2} = 0,01255 (Re_0)^{-1/4} \right)$$

Zahlentafel 3

α_∞	c_a	$\left(\frac{y_H}{l}\right)_S \cdot 10^4$	$\left(\frac{y_H}{l}\right)_D \cdot 10^4$	$\left(\frac{u_H}{u_\infty}\right)_S$	$\left(\frac{u_H}{u_\infty}\right)_D$	η_S	η_D	ξ_S	ξ_D	$\xi_S \left(\frac{y_H}{l}\right)_S$	$\xi_D \left(\frac{y_H}{l}\right)_D$	$c_{w,p} = \text{I} + \text{II}$
-2,0°	-0,042	20,38	23,13	0,850	0,940	0,62	0,60	1,148	1,622	0,00234	0,00375	0,00609
-0,4	0,120	22,85	12,61	0,850	0,940	0,65	0,57	1,143	1,630	0,00262	0,00706	0,00468
1,1	0,271	26,30	10,42	0,850	0,940	0,67	0,49	1,143	1,630	0,00301	0,00170	0,00471
2,6	0,421	43,50	9,50	0,850	0,940	0,77	0,49	1,114	1,630	0,00485	0,00155	0,00640
		35,60	11,00	0,900	0,900	0,76	0,49	1,375	1,402	0,00489	0,00154	0,00634 +

+) mit willkürlich geändertem Druckverlauf zwischen $x/l = 0,9$
und $1,0$ ($\left(\frac{u_H}{u_\infty}\right)_S = 0,90$ statt $0,85$ und $\left(\frac{u_H}{u_\infty}\right)_D = 0,90$
statt $0,94$)

VI. Zusammenfassung

Für umfangreiche Reibungsschichtberechnungen, wie sie z.B. im Zusammenhang mit der theoretischen Ermittlung der Polare eines Tragflügels erforderlich werden, kommen fast ausschliesslich zeitsparende Näherungsverfahren in Betracht, wobei die beschränkte, aber doch wohl meist ausreichende Genauigkeit solcher Verfahren bewusst in Kauf genommen wird.

Die **bisher** bekannt gewordenen Rechenverfahren dieser Art für die laminare und turbulente Reibungsschicht werden in ihren wesentlichen Merkmalen dargestellt und teils in Richtung einer bequemerer Anwendung, teils im Sinne einer Verallgemeinerung weiterentwickelt.

Als recht fruchtbare Vereinfachungs-Massnahme erwies sich bei der Berechnung der laminaren wie bei der turbulenten Reibungsschicht u.a. die Annäherung der vorgegebenen äusseren Potential-Geschwindigkeitsverteilung durch Geradenstücke (am bequemsten durch ein Sehnenvolygon, auf Saug- und Druckseite je etwa 10 bis 15 Abschnitte). Die auftretenden gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen lassen sich in diesem Fall bei gleichzeitiger Wahrnehmung schon bisher üblicher Vereinfachungs-Massnahmen (z.B. Annahme eines unveränderlichen Mittelwertes für $\frac{\delta^*}{\delta}$ bei der turbulenten Reibungsschicht) für die einzelnen linearen Abschnitte Δs geschlossen integrieren. Die Lösungen wurden in Nomogramm- oder Kurvenform dargestellt. Bei der Anwendung dieser Verfahren erweist es sich als besonders vorteilhaft, dass (ausser bei der Bestimmung des Gruschwitzschen Formparameters η der turbulenten Reibungsschicht mit Berücksichtigung der Re-Zahl nach Kehl [3]) als Ausgangsgrössen nur das Verhältnis $\frac{U}{U_\infty}$ der Potentialgeschwindigkeiten am Ende (Index 2) und am Anfang (Index 1) der linearen Abschnitte Δs , sowie das Verhältnis $\frac{\Delta s}{x_1}$ gebraucht werden, wo $x_1 (=x_1)$ (Re_{x_1}) bei der laminaren und x_1 ($Re_{x_1}^{1/4}$) bei der turbulenten Reibungsschicht) eine sich schrittweise ergebende Reibungsschichtgrösse ist. Eine graphische Differentiation der Kurve $U(s)$ kann in allen Fällen vermieden werden.

Bei der Berechnung des Formparameters η der turbulenten Reibungsschicht an Hand von Kurvenblättern spielen die Grössen $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$, $\frac{\Delta s}{\vartheta_1}$ und $(Re_\vartheta)^{1/4}$ eine Rolle; diese lassen sich jedoch leicht aus der schon ermittelten Grösse $x = \vartheta (Re_\vartheta)^{1/4}$ errechnen.

In einem Anhang wird eine Kurzgefasste Beschreibung der rechnerischen Bestimmung des Höchstauftriebsbeiwertes und des Profilwiderstandes von Tragflügelprofilen gegeben.

VII. S c h r i f t t u m .

- [1] H. H o l s t e i n und T. B o h l e n , Über die laminare und turbulente Reibungsschicht. Preiarbeiten des Preisausschreibens 1940 der LGL, Bericht S 10.
- [2] A. W a l z , Bericht über die Sitzung "Grenzschichtfragen" am 28./29.10.41 in Göttingen. Bericht LGL 14
- [3] A. K e h l , Untersuchungen über konvergente und divergente turbulente Reibungsschichten, Göttinger Dissertation 1942. Ing.Arch.Bd. 13(1943)H.5
- [4] E. G r u s c h w i t z , Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.Arch. Bd. 2(1932).
- [5] H. B l a s i u s , Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung Z. Math. und Physik Bd. 56 (1908)
- [6] D. R. H a r t r e e , On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambridge Philos. Soc.Vol. 33, part II (1937)
- [7] L. H o w a r t h , On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Royal Soc.London Nr. 319, Vol. 164 (1938)
- [8] H. G ö r t l e r , Weiterentwicklung eines Grenzschichtprofils bei gegebenem Druckverlauf, ZAMM Bd 19; Nr.3, (1939)
- [9] W. M a n g l e r , Bericht über die Sitzung „Grenzschichtfragen“. LGL 141
- [10] K. S c h r ö d e r , Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. FB.Nr. 1741 (1943).
- [11] H. G ö r t l e r , Ein Differenzenverfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Bericht erscheint demnächst.

- [12] K. P o h l h a u s e n , Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminären Grenzschicht, ZAMM, Bd 1 (1921), S.252.
- [13] I. N i k u r a d s e , Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forsch.-Arb. a.d.Geb.d.Ing.-Wesens. Heft 289 (1929) VDI-Verlag, Berlin.
- [14] H. S c h m i d b a u e r , Verhalten turbulenter Reibungsschichten an erhaben gekrümmten Wänden. Diss. T.H. München.
- [15] A. B u r i , Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Diss. Zürich 1931.
- [16] A. W a l z , Zur Berechnung des Höchstauftriebswertes von Tragflügelprofilen ohne und mit Auftriebsklappen. FB.Nr. 1769 (1943).
- [17] J. P r e t s c h , Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jahrb. d.deutsch.Luftfahrt-Forschung 1938 I, S.60.
- [18] A. W a l z , Einige Beispiele zur theoretischen Berechnung der Polare eines Tragflügelprofils FB Nr.
- [19] R. P i n k e r t o n , Calculated and measured pressure distributions over the midspan section of the NACA 4412 airfoil. NACA-Rep.563 (1936)
- [20] O. S c h r e n k und A. W a l z , Theoretische Verfahren zur Berechnung von Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen, Jahrb.d.deutschen Luftf. Forschung. 1939 I, S.29.
- [21] A. W a l z , Berechnung der Druckverteilung von Klappenprofilen mit Totwasser. Jahrb.d.deutschen Luftf.Forschung 1940 I, S.265.
- [22] A. W a l z , Versuche mit Reibungsschichtabsaugung an einem Flügelprofil NACA 23015 bei verschiedenen Lagen des Absaugeschlitzes längs der Flügeltiefe. FB Nr. 1611 (1942).

- [23] J. A c k e r e t , Zum Entwurf dichtstehender Schaufelgitter, Schweizerische Bauzeitung, Bd.120, Nr. 9 (1942),
- [24] H. D o e t s c h und A. P a s c h k e , Druckverteilungsmessungen und Wägungen an den Profilen NACA 23009, 23012 und 23018 ohne und mit Spreizklappe im 5 x 7 m - Windkanal der DVL. FB Nr. 1095 (1939),
- [25] A. D o e t s c h , Versuche an Tragflügelprofilen des North-American- "Mustang" - FB Nr. 1712/1 und 2 (1943),
- [26] H. S c h l i c h t i n g , Ueber die laminare und turbulente Reibungsschicht. Preisarbeiten des Preisausschreibens 1940 der LGL, Bericht S. 10,
- [27] A. W a l z , Messungen an zwei Abänderungen des "Mustang" - Profils mit kleinem Nullmoment und Vergleich mit theoretischen Rechnungen. Erscheint demnächst.
- [28] A. B e t z , Energieumsetzungen in Venturidüsen, Die Naturwissenschaften, 17. Jahrg., Heft 10 (1929).
- [29] W. M a n g l e r , Das Verhalten der Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten mit Druckanstieg UM Nr. 3052(1943).
- [30] K. W i e g h a r d t , Ueber die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten bei veränderlichem Aussendruck. UM Nr. 6603(1943).

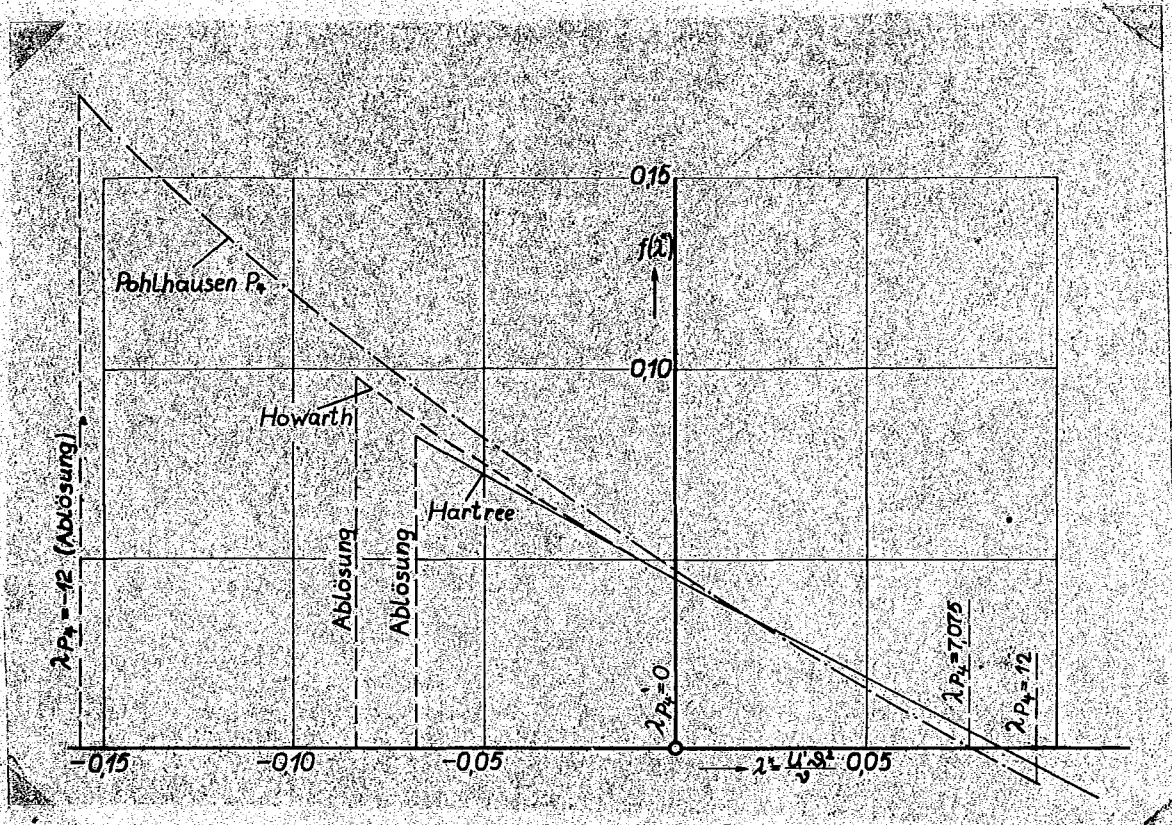


Bild 1. Abhängigkeit der Funktion $f(\lambda^*)$ nach Gl. (13a) von dem für das laminare Geschwindigkeitsprofil gewählten Ansatz.

Bild 2 und 3: (Arbeitsblätter) am Schluss lose beigelegt.

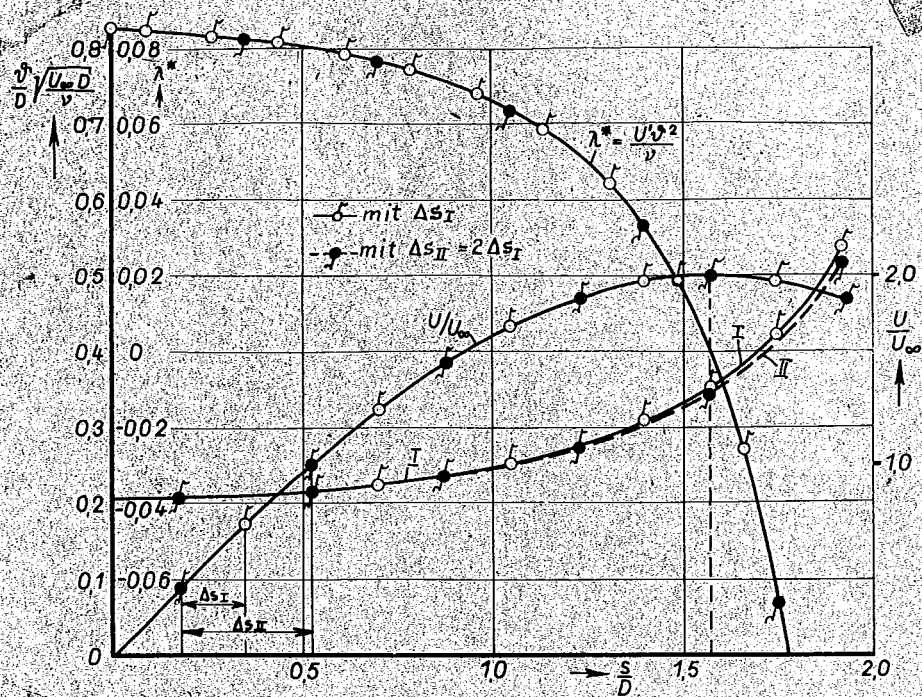


Bild 4: Einfluss der Schrittgröße Δs bei der Berechnung von δ und λ^* . Beispiel: Potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung am Kreiszylinder ohne Zirkulation (D = Kreisdurchmesser)

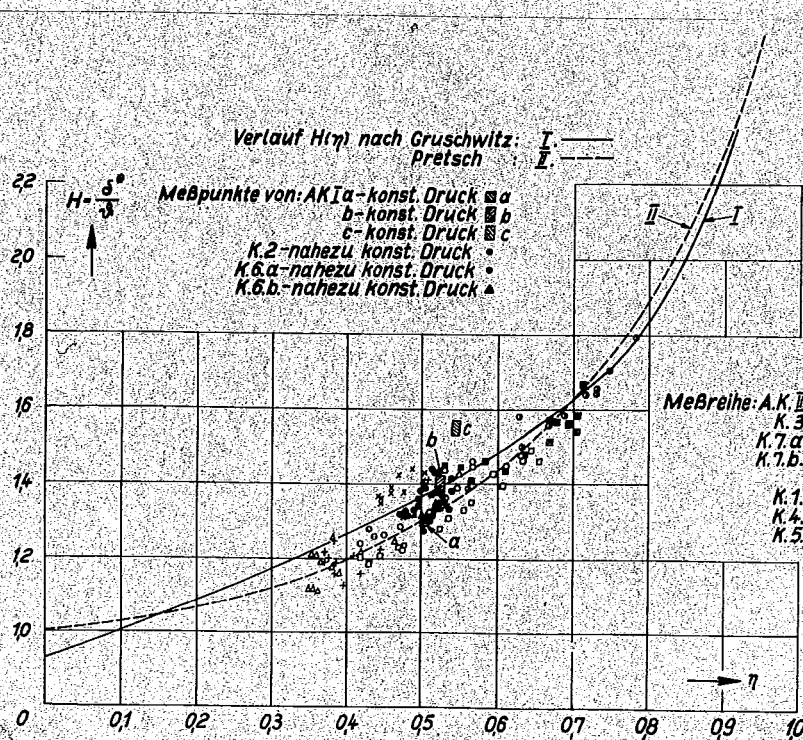


Bild 5: $\frac{\delta^*}{\delta}$ als Funktion des Formparameters η (Mittelwertkurve nach Gruschwitz ausgezogen, übrige Messwerte nach neueren Messungen von Kehl [3]. Nach einer theoretischen Überlegung von Pretsch [17] gilt die gestrichelte Kurve für Geschwindigkeitsprofile von der Form Gl. (16 b) allgemein.

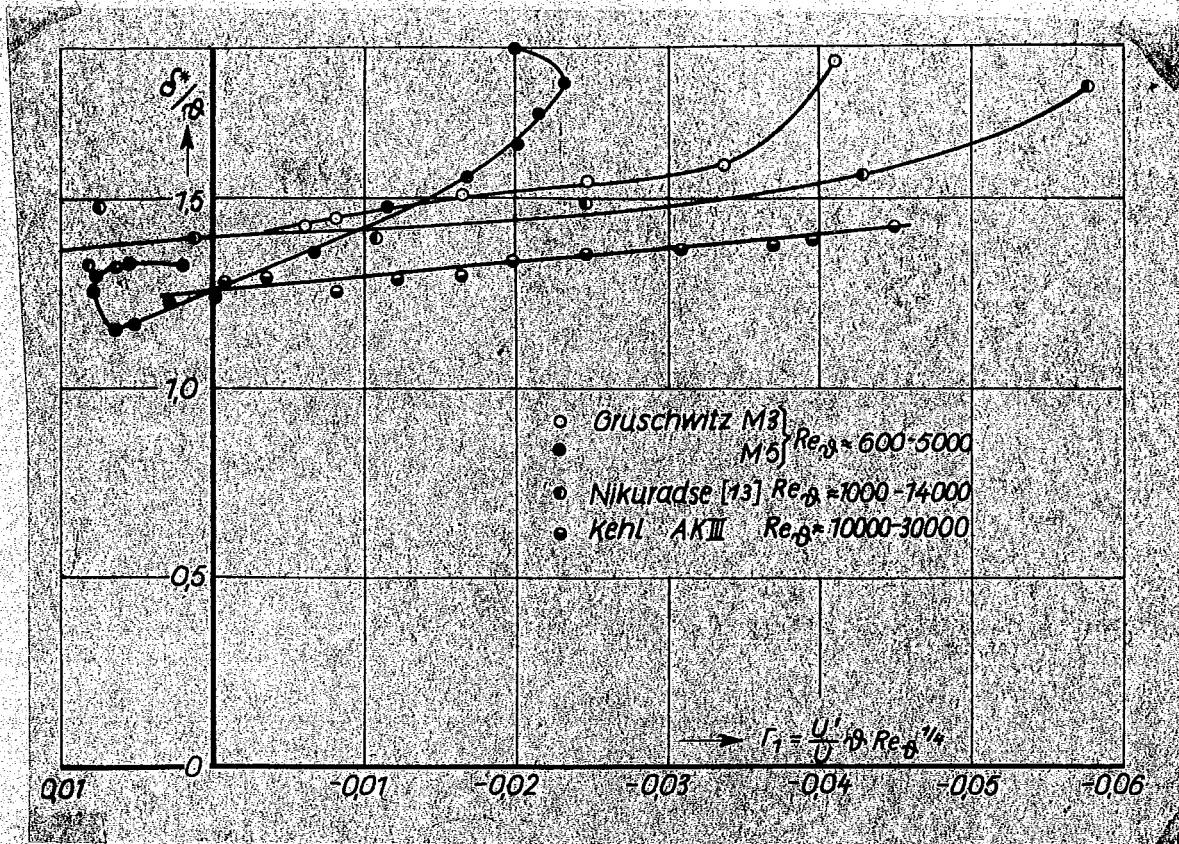


Bild 6: $\frac{\delta^*}{\delta}$ als Funktion des Formparameters r_1 für einige Messungen in verschiedenen Re -Zahl-Bereichen.

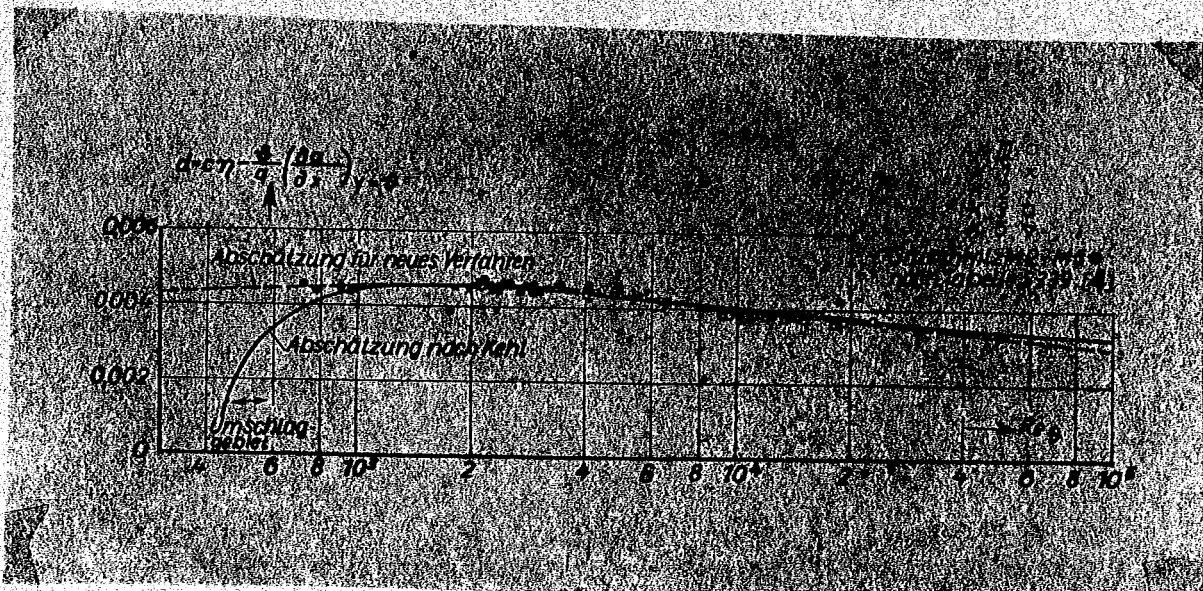


Bild 7: Abhängigkeit der Grösse $d = c\eta - \frac{2}{q} \frac{dg}{ds} (y=0)$ von Re_0 nach Messungen von Kehl.

Bild 8 bis 14: (Arbeitsblätter) am Schluss lose beigelegt !

Bild 15 und 16: Beispiele, die den mit den neuen Rechenverfahren für die turbulente Reibungsschicht erreichbaren Grad der Verbesserung der Ergebnisse aufzeigen.

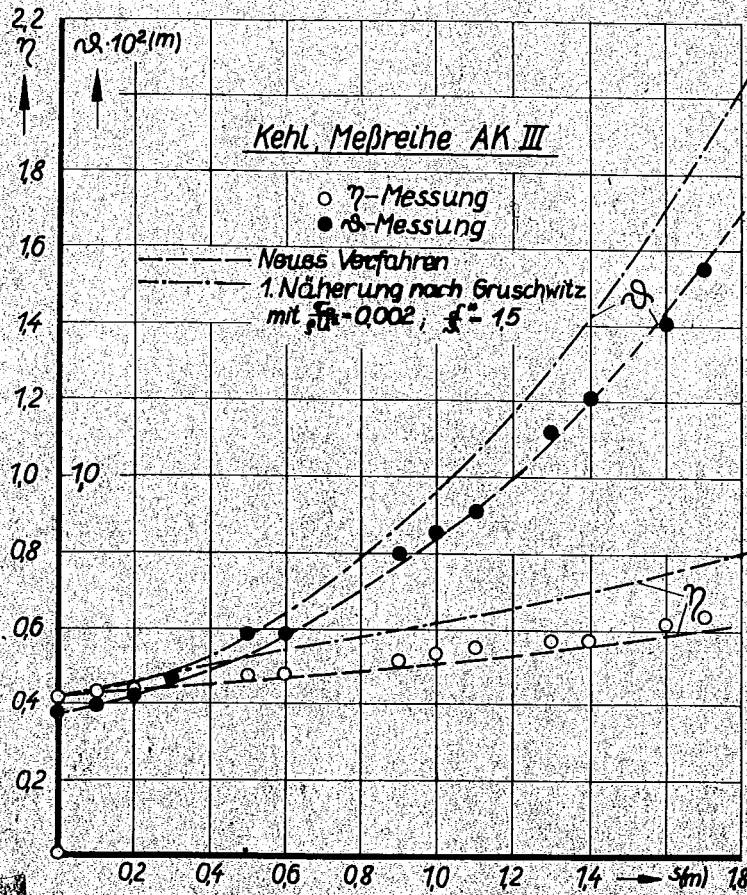


Bild 15.

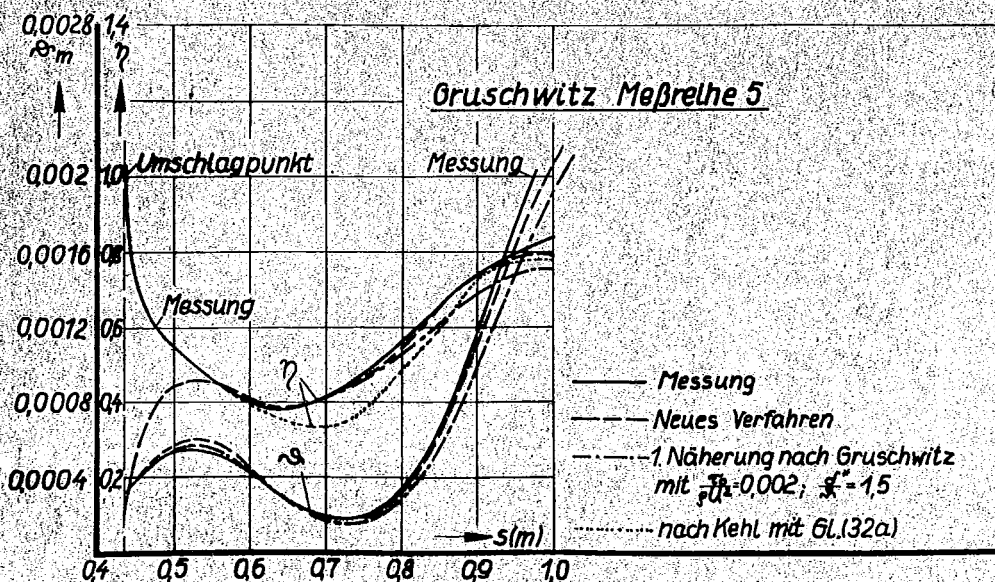


Bild 16.

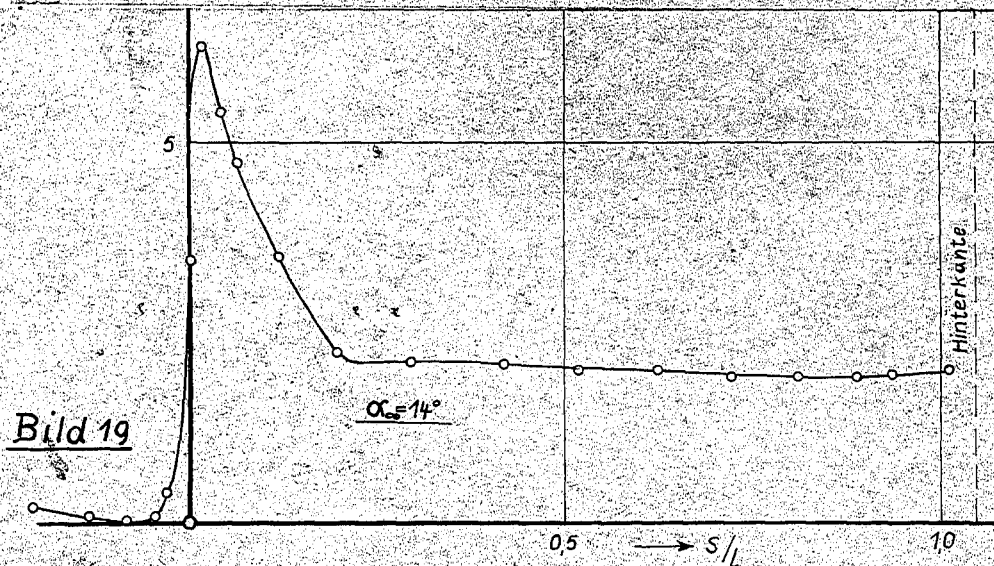
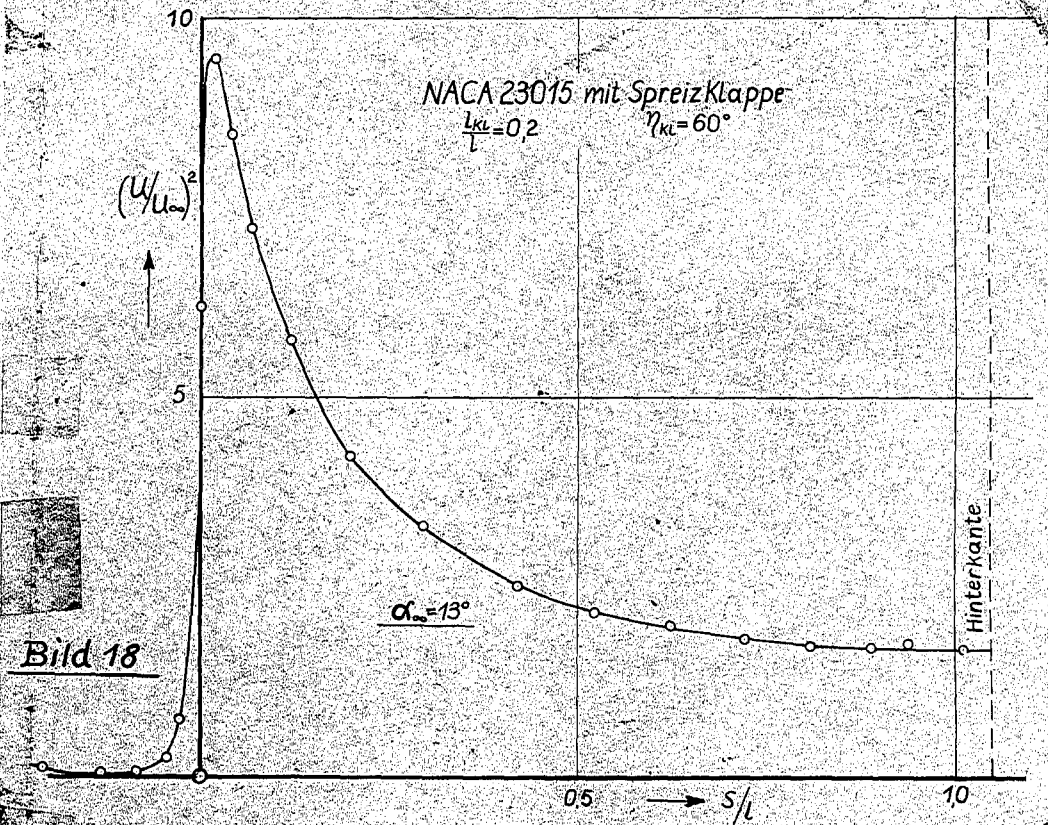
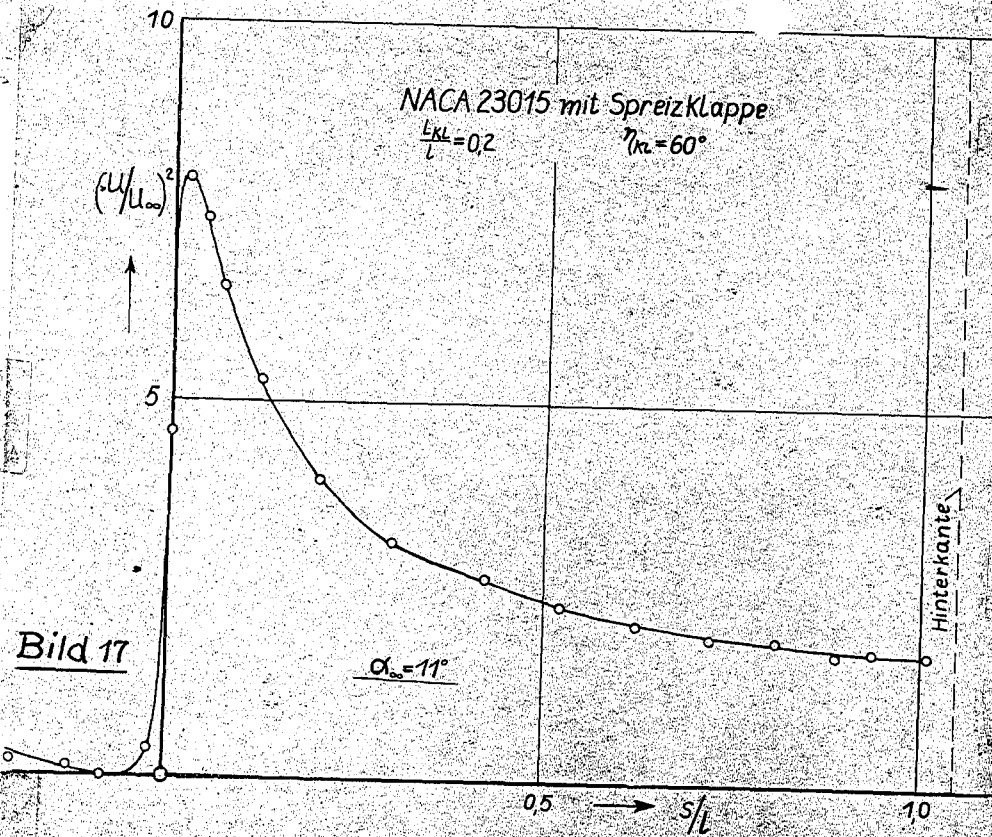


Bild 17 bis 19: Druckverteilungen des Profils NACA 23015 mit Spreizklappe ($\frac{l_{KL}}{l} = 0,2$, $\eta_{KL} = 60^\circ$), Messung im grossen Wasserkanal der AVA [22], Saugseite.



Bild 20



Bild 21



Bild 22

Bild 20 bis 22. Den Druckverteilungen, Bild 17 bis 19, zugeordnete Strömungsaufnahmen (die eingezeichneten Pfei-

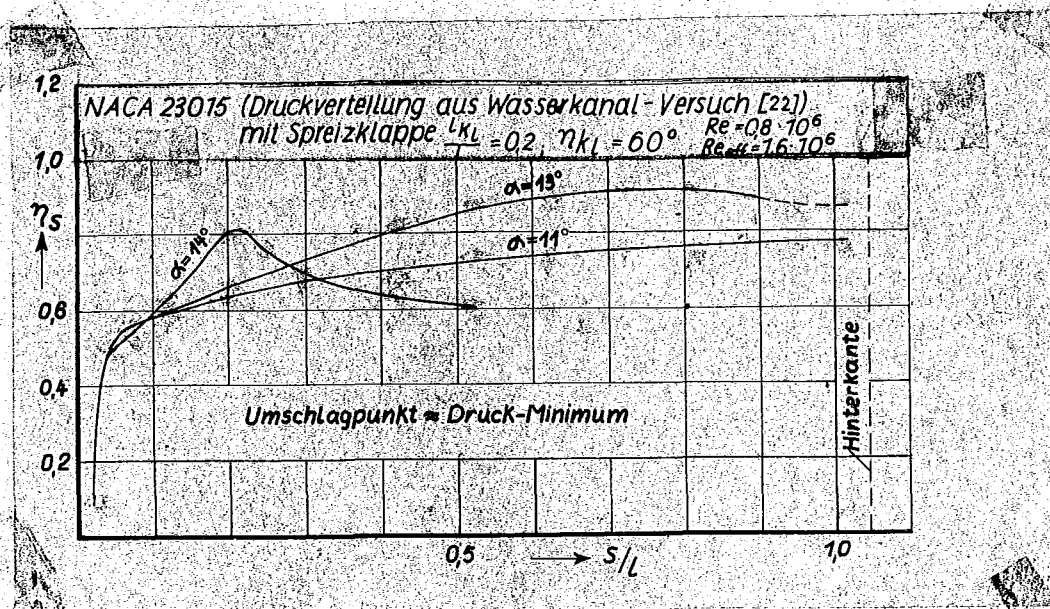


Bild 23: Zu den gemessenen Druckverteilungen, Bild 17 bis 19, nach dem ursprünglichen Gruschwitz-Verfahren (ohne Re-Zahl-Einfluss mit $\tau_0/\rho U^2 = 0,002$ und $\frac{\delta^*}{\nu} = 1,5$) gerechneter Verlauf des Formparameters η .

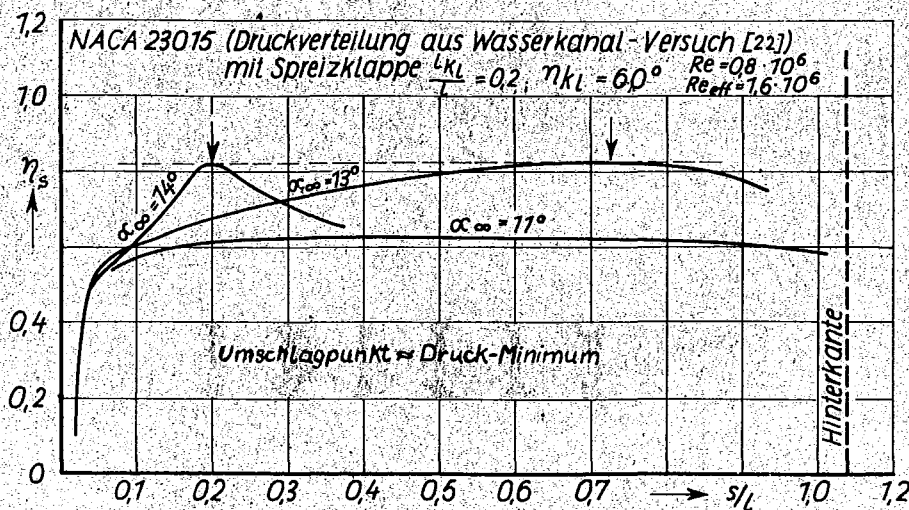


Bild 24: Zu den Druckverteilungen, Bild 17 bis 19, nach dem neuen Rechenverfahren für die turbulente Reibungsschicht (mit Re-Zahl-Einfluss nach Kehl [3] und $\tau_0/\rho U^2 = 0,01255 \cdot (Re_\nu)^{-1/4}$, $\frac{\delta^*}{\nu} = 1,5$) gerechneter Verlauf von η .

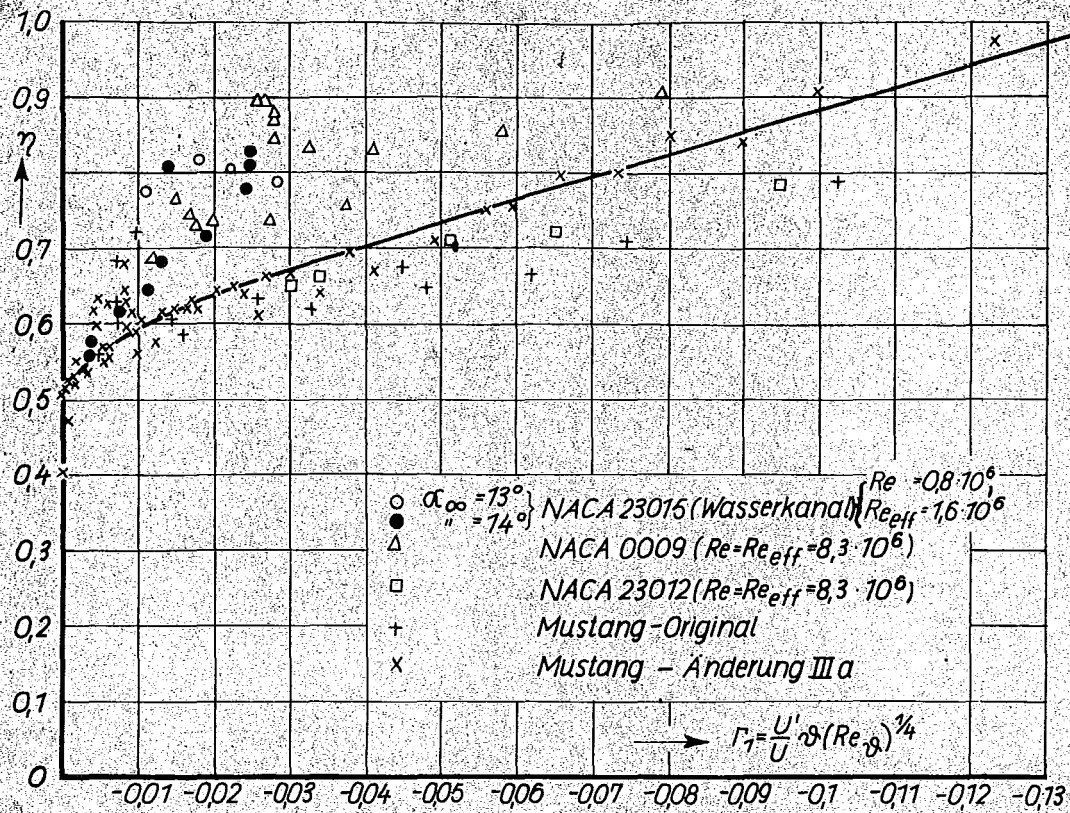


Bild 25: Zusammenhang zwischen den Formparametern Γ_1 und η

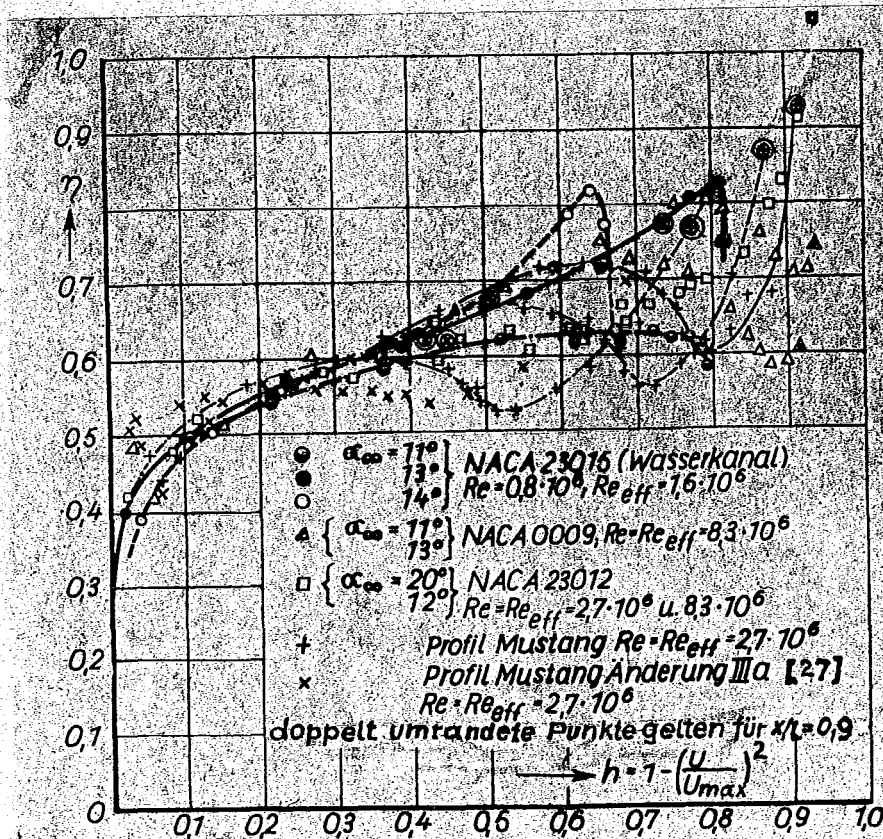


Bild 26: Zusammenhang zwischen dem Formparametern $h = 1 - \left(\frac{U}{U_{max}}\right)^2$ nach Ackeret und $\eta = 1 - \left(\frac{U}{U_{max}}\right)^2$ $y = 0$

Bild 28 und 29: Zwei Beispiele zur Abschätzung von $c_{a \max}$ mit Hilfe des Ackeretschen Formparameters $h = 1 - \left(\frac{U}{U_{\max}}\right)^2$.

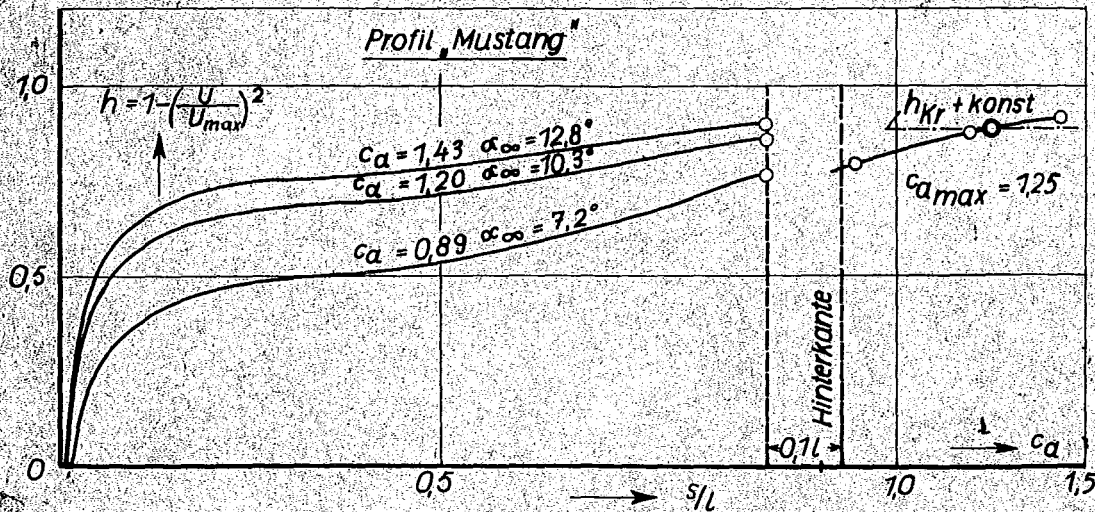


Bild 28

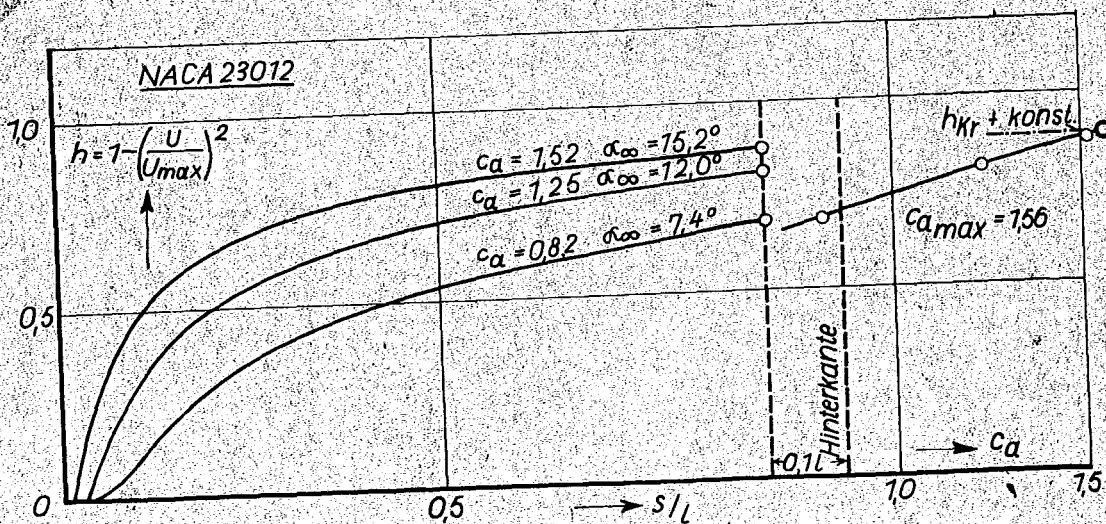


Bild 29

Bild 27, 30, 31 und 33: (Arbeitsblätter) am Schluss
 lose beigelegt !

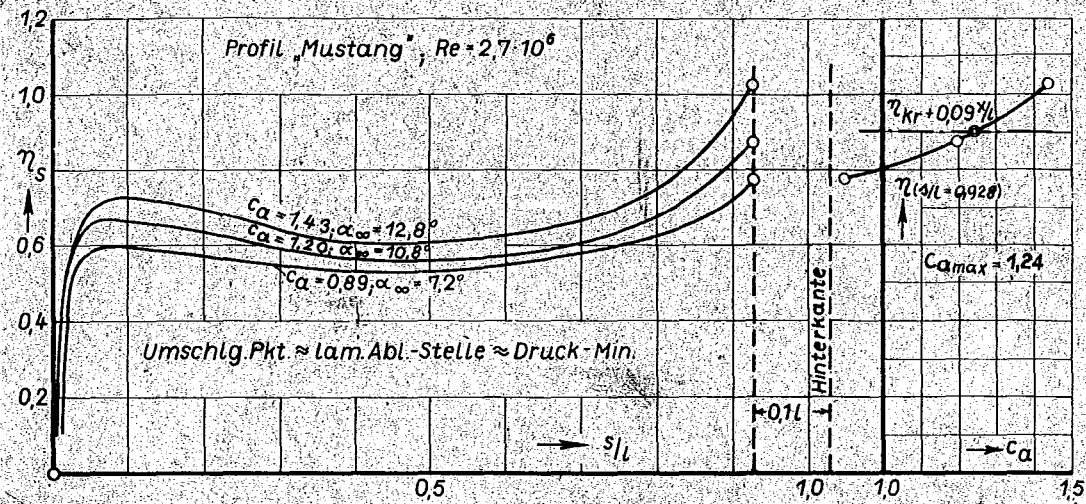
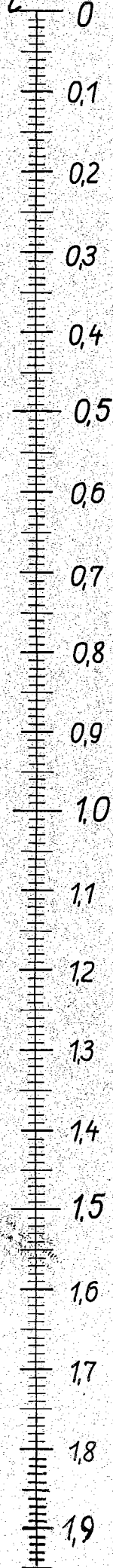
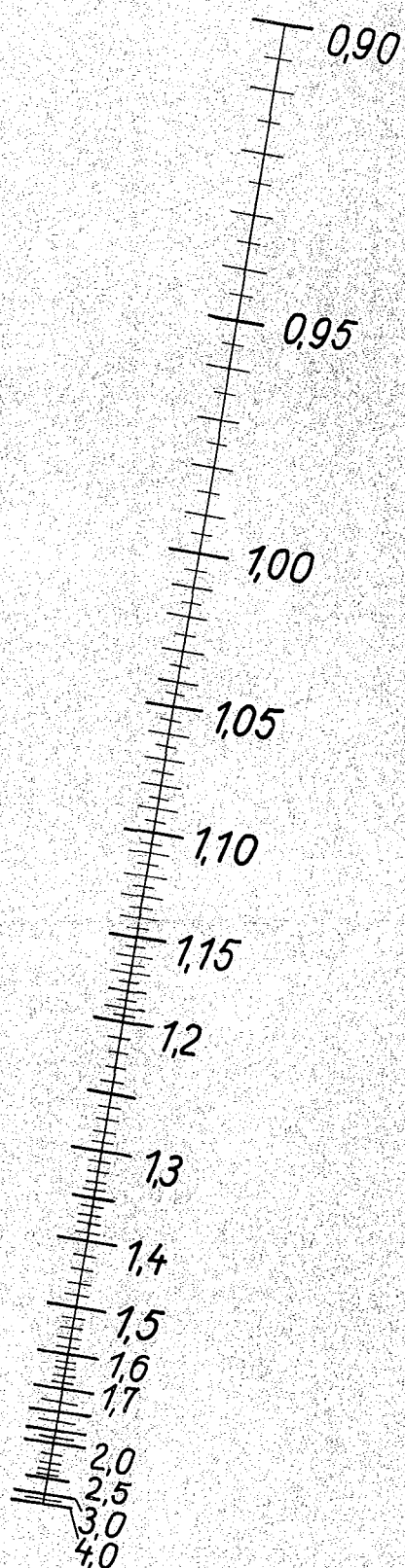
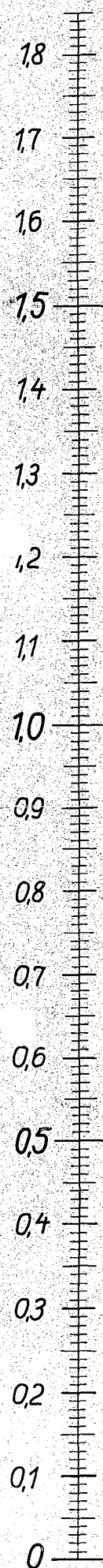


Bild 32: Beispiel zur Bestimmung von c_{dmax} mit Hilfe des Gruschwitzschen Formparameters η und Gl. (42).

$$\frac{(\gamma Re_{\lambda})_2}{(\gamma Re_{\lambda})_1}$$

$$\frac{u_2}{u_1}$$

$$\frac{\Delta s/l}{(\gamma Re_{\lambda})_1}$$



Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht

mit den Voraussetzungen

$$U^{b-1} = k_1 + k_2 \Delta s,$$

$$f = \alpha - b \lambda^*$$

Bild 3

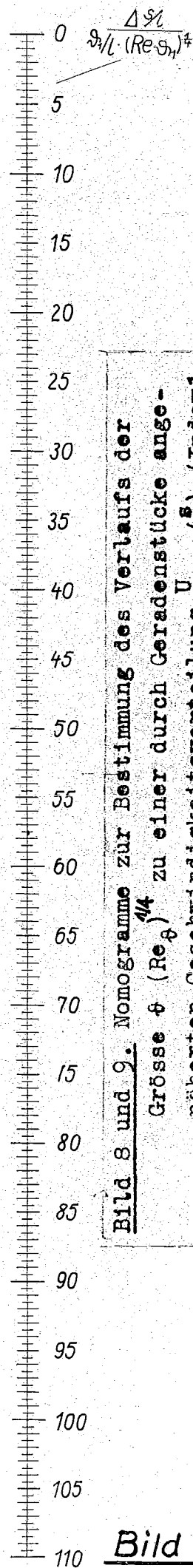
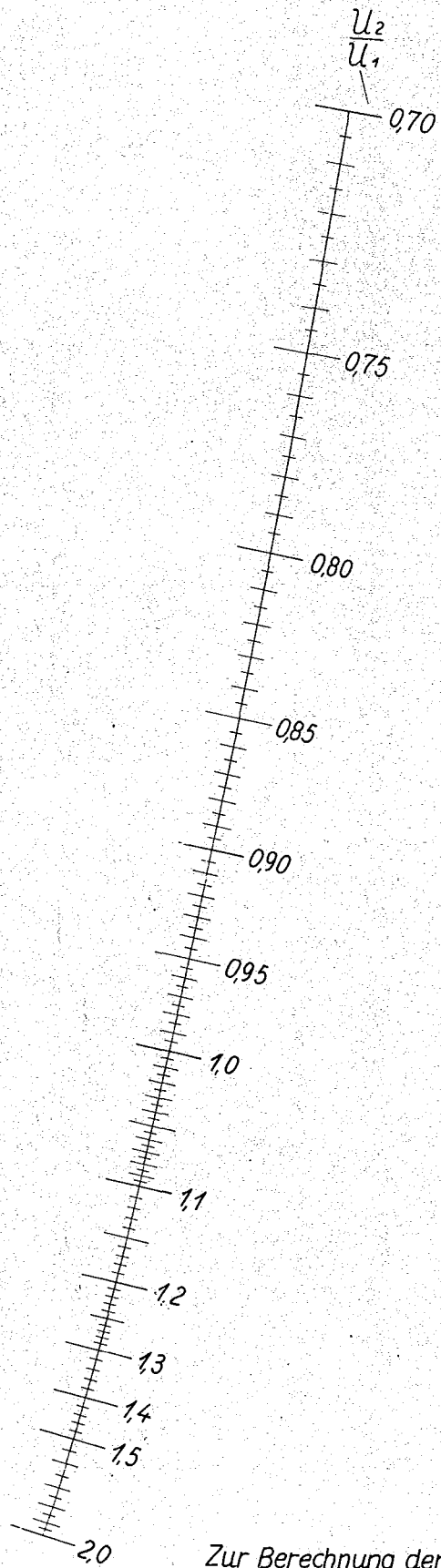
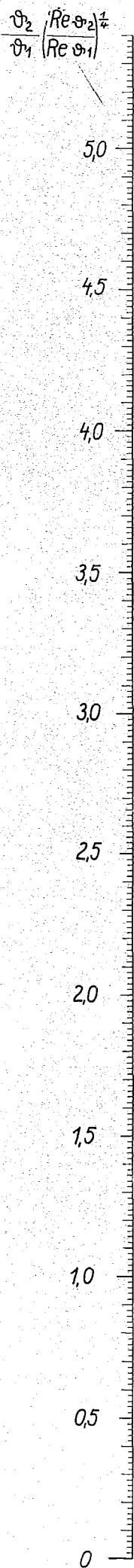
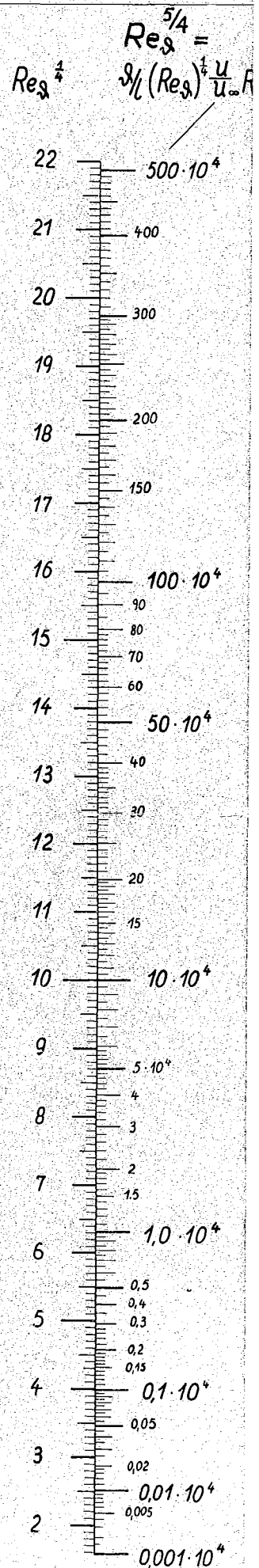
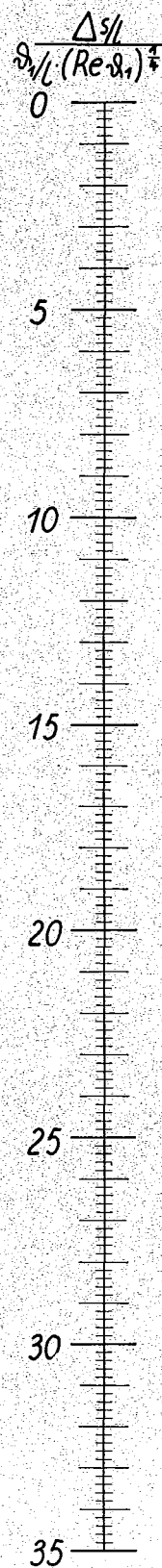
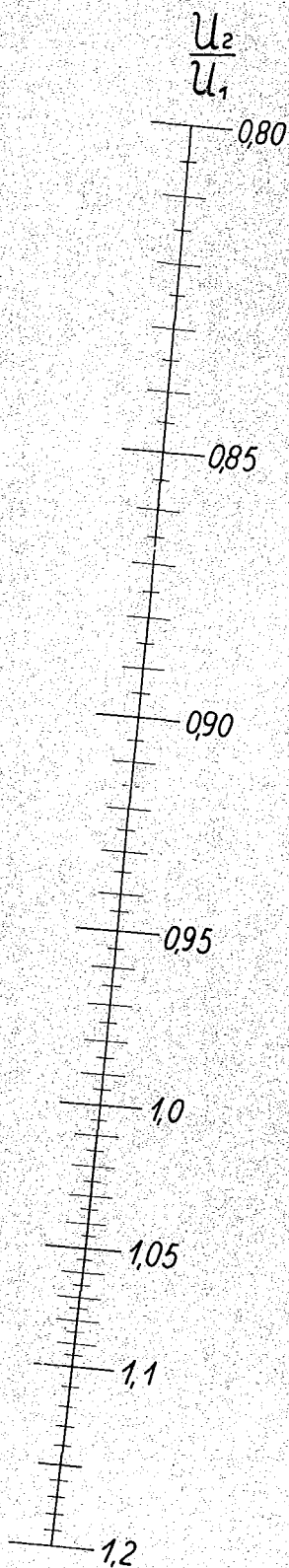
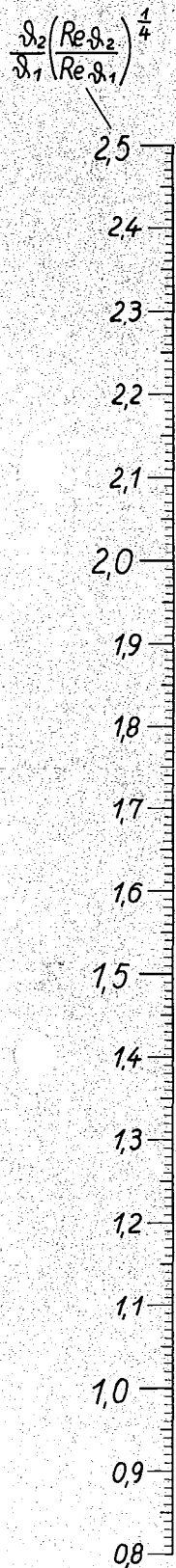


Bild 8 und 9. Nomogramme zur Bestimmung des Verlaufs der
Grösse $\vartheta (Re \vartheta)^{\frac{1}{4}}$ zu einer durch Geradenstücke ange-
nähernten Geschwindigkeitsverteilung $u_{\infty} \left(\frac{s}{l} \right)$ (Index 1 =
Anfangs Index 2 = Ende eines geraden Linienabschnittes)

Zur Berechnung der turbulenten Reibungsschicht

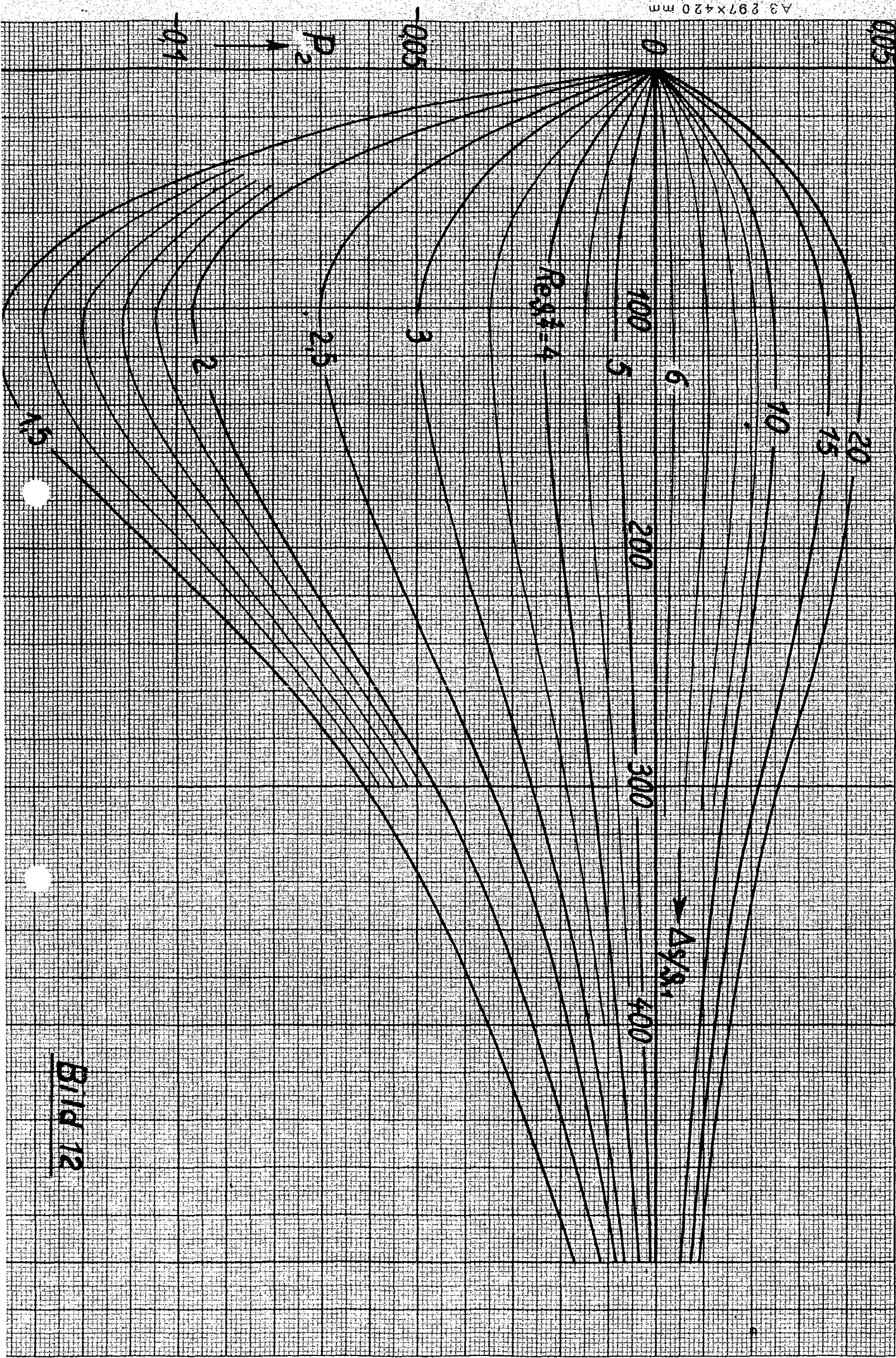
mit den Voraussetzungen
 $\frac{d}{x} = 1,5$; $u = \text{konstant}$; $\frac{L}{s \sqrt{u^2}} = 0,01255 (Re \vartheta)^{\frac{1}{4}}$



Zur Berechnung der turbulenten Reibungsschicht

mit den Voraussetzungen
 $\frac{d^*}{\delta} = 1.5, u' = \text{konstant}, \frac{\tau_0}{\rho u^2} = 0.01255 (Re_{\delta})^{-1/4}$

Bild 9



B114 12

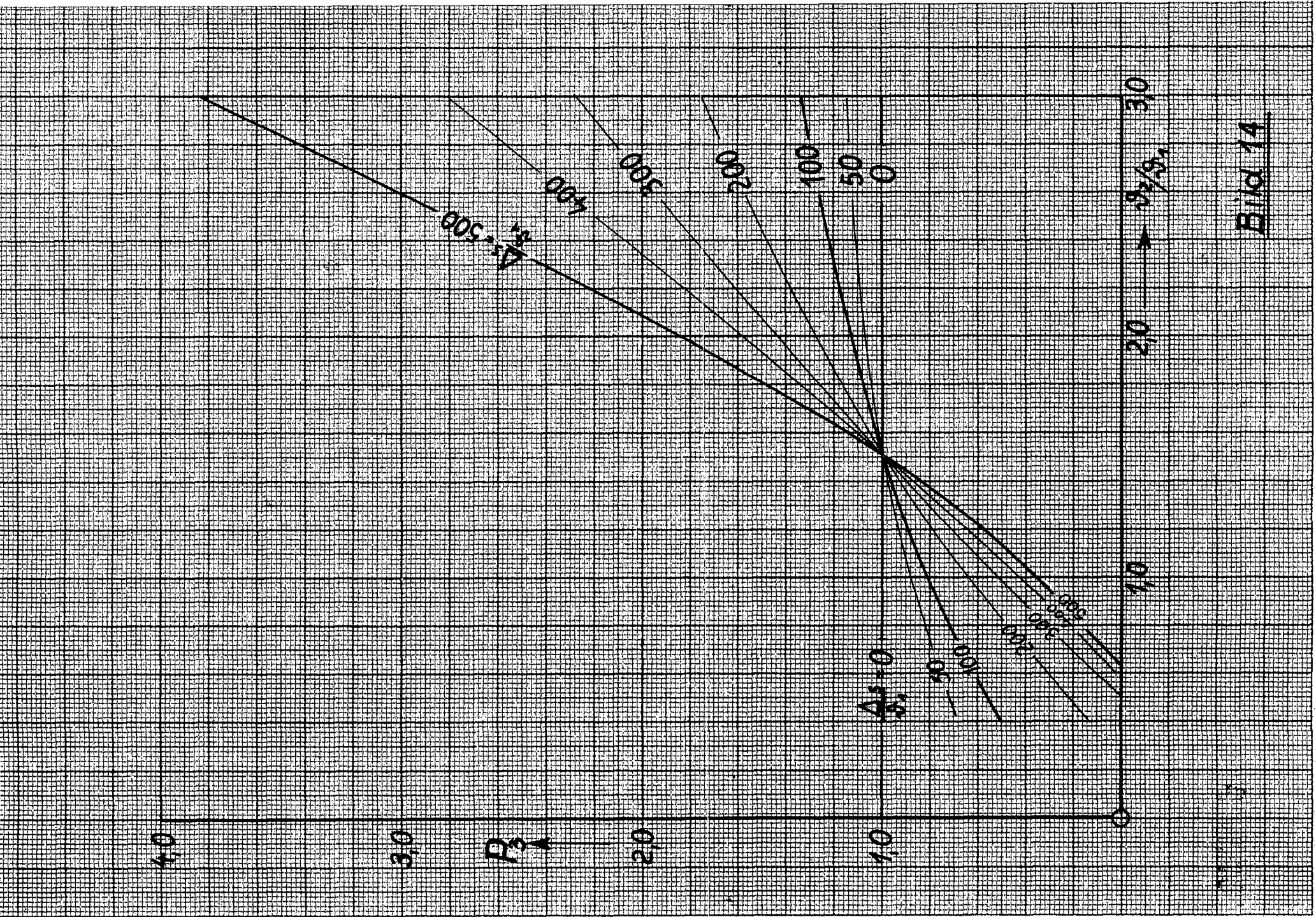


Bild 14

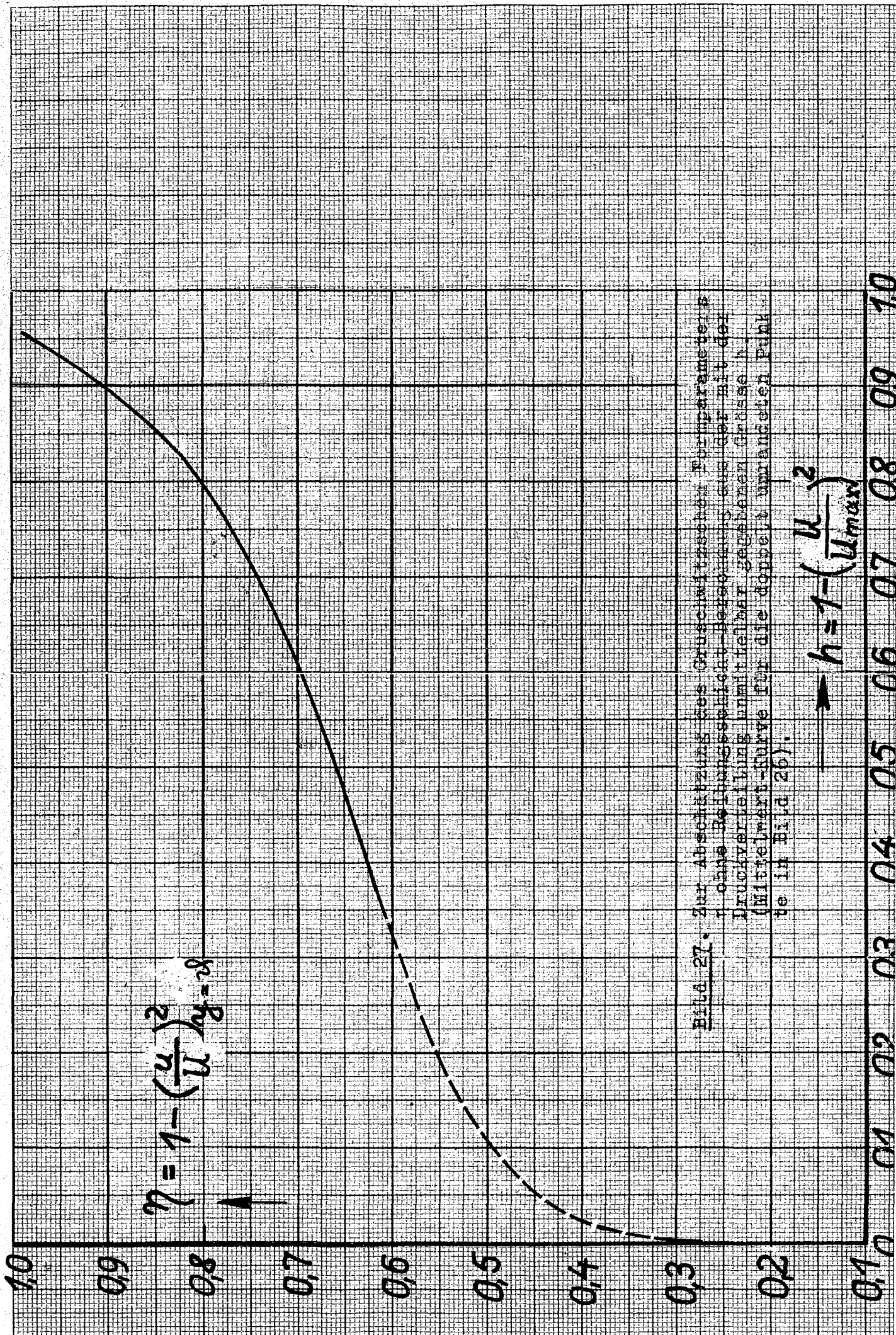


Bild 27. Zur Abschätzung des Gruschwitzschen Formparameters n ohne Berücksichtigung-Berechnung aus der mit der Druckverteilung unmittelbar gegebenen Grösse h . (Mittelwert-Kurve für die doppelt umrandeten Punkte in Bild 26).

$$h = 1 - \left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2$$

Zur Bestimmung der Zirkulationsverringering durch den Einfluß der Reibungsschicht.

50

$$C_a = \frac{4\pi R}{l} \sin[\alpha_e^* (1 - \frac{\Delta \epsilon_0}{\alpha_e^*})]$$

$$\frac{\Delta \epsilon_0}{\alpha_e^*} = [1 - 0,026(16 - \delta^\circ)] \cdot \Phi$$

α_e^* = Anstellwinkel gegen theor. Nullauftriebs-Richtung

R = Radius des Abb-Kreises

l = Profiltiefe

δ_s = Impulsverlust-Dicke auf der Saugseite

δ_D = " " " " Druckseite

(δ_s und δ_D an der Stelle $x/l = 0,9$)

δ = Hinterkantenwinkel in Grad

30

$$\sqrt[3]{\frac{\delta_s - \delta_D}{l} \cdot Re_{eff}}$$

20

10

0,1

0,2

0,3

0,4

0,5

0,6

0,7

0,8

0,9

1,0

Bild 31

$$\frac{\delta_s - \delta_D}{\delta_s + \delta_D}$$

zur Berechnung des Profilwiderstandes
nach Pretsch

$$c_{wp} = \left(\frac{\hat{v}_H}{L} \right)_s \xi_s + \left(\frac{\hat{v}_H}{L} \right)_D \xi_D$$

$$\xi = f \left(\frac{u_H}{u_\infty} \right)$$

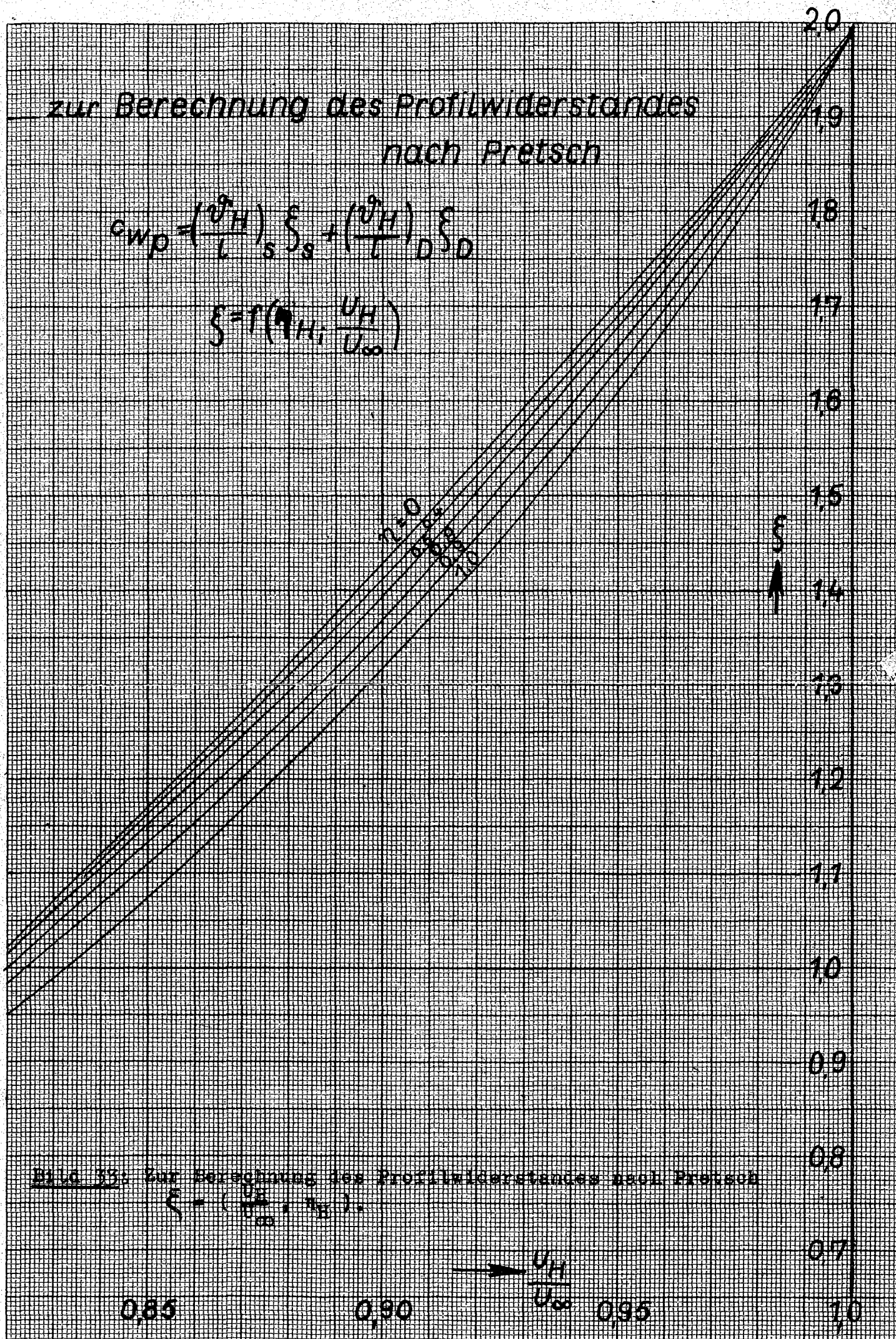
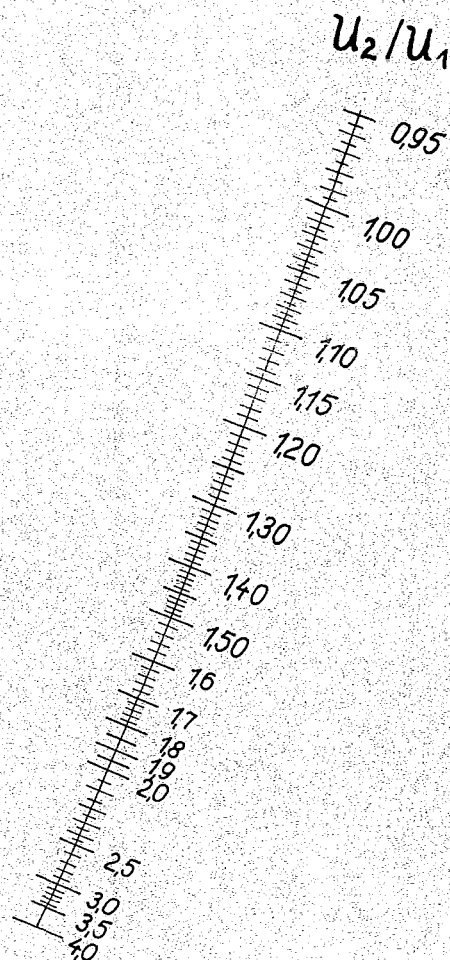


Bild 33: Zur Berechnung des Profilwiderstandes nach Pretsch

$$\xi = \left(\frac{u_H}{u_\infty} \right)^{1.5}$$

$\frac{(\vartheta Re \vartheta)_2}{(\vartheta Re \vartheta)_1}$

10,5
10
9,5
9
8,5
8
7,5
7
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0



Zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht
mit den Voraussetzungen
 $u = \text{konstant.}$
 $f = a - b \lambda^*$

$\frac{\Delta s}{(\vartheta Re \vartheta)_1}$

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

**Bild 2 und 3. Nomogramme zur abschnittweisen Bestimmung
des Verlaufs der Grösse $\vartheta Re \vartheta$, Geschwindigkeitsver-
teilung $U(s)$ (Index 1 = Anfang, Index 2 = Ende eines
Kurvenabschnittes Δs).**

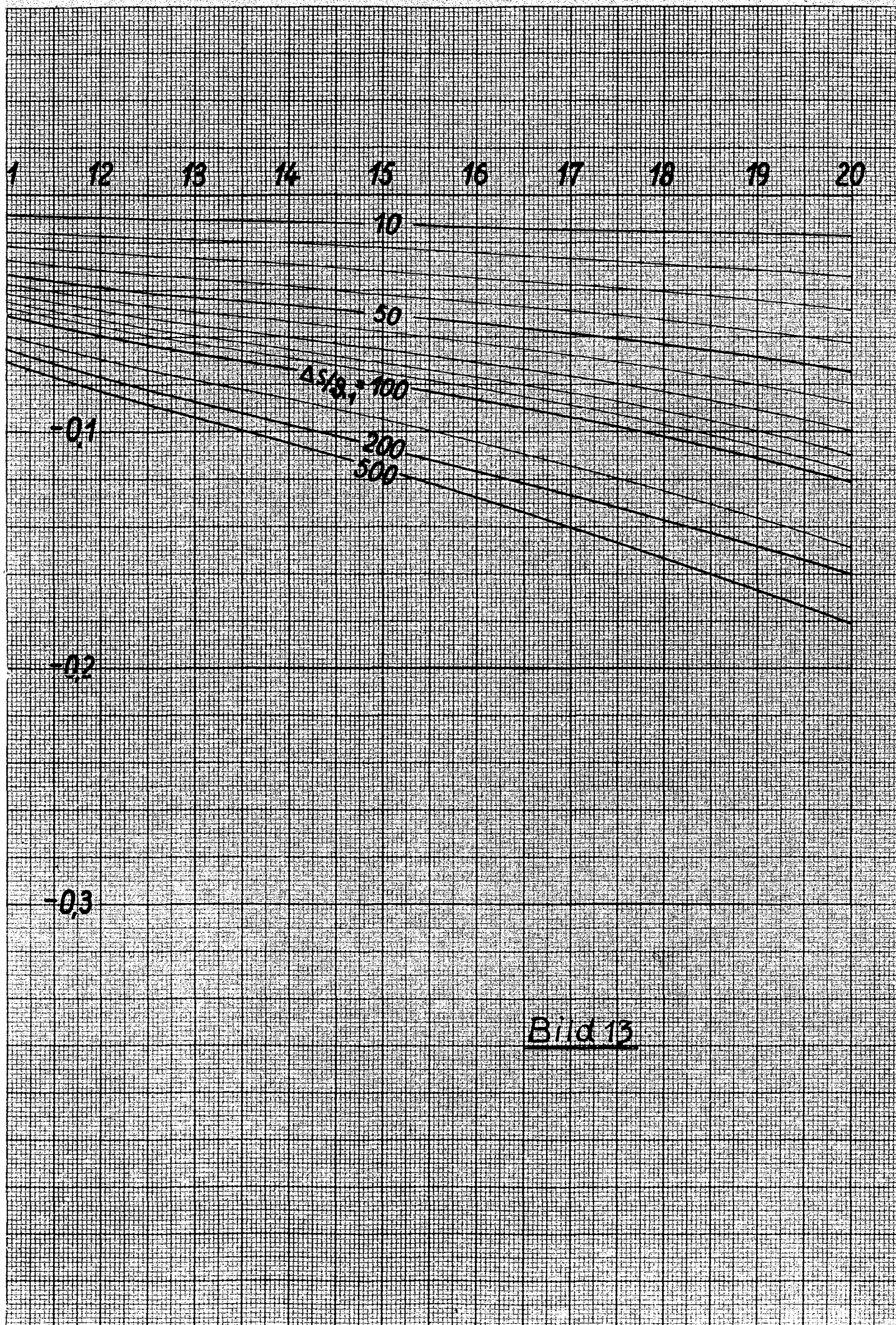


Bild 13

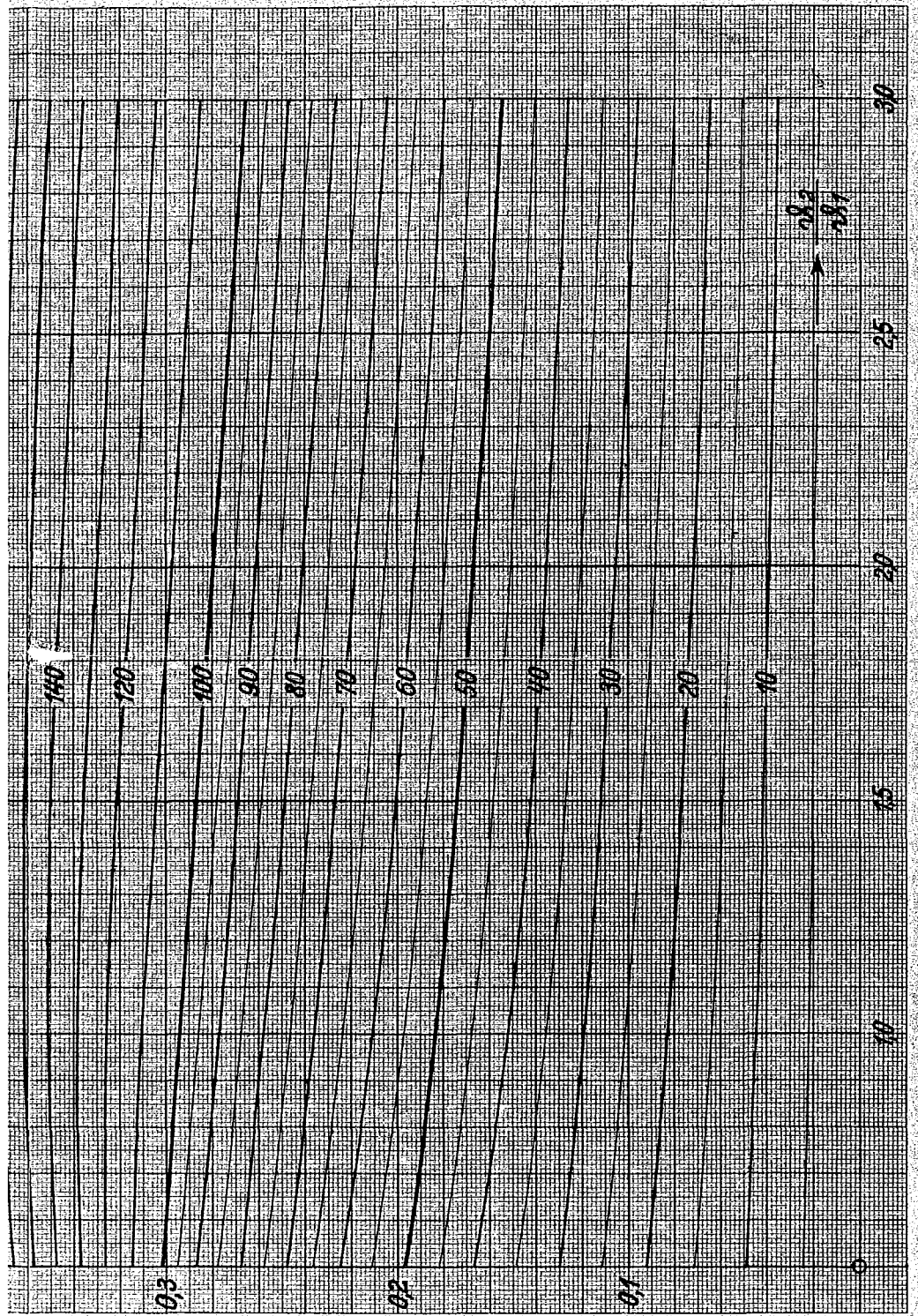


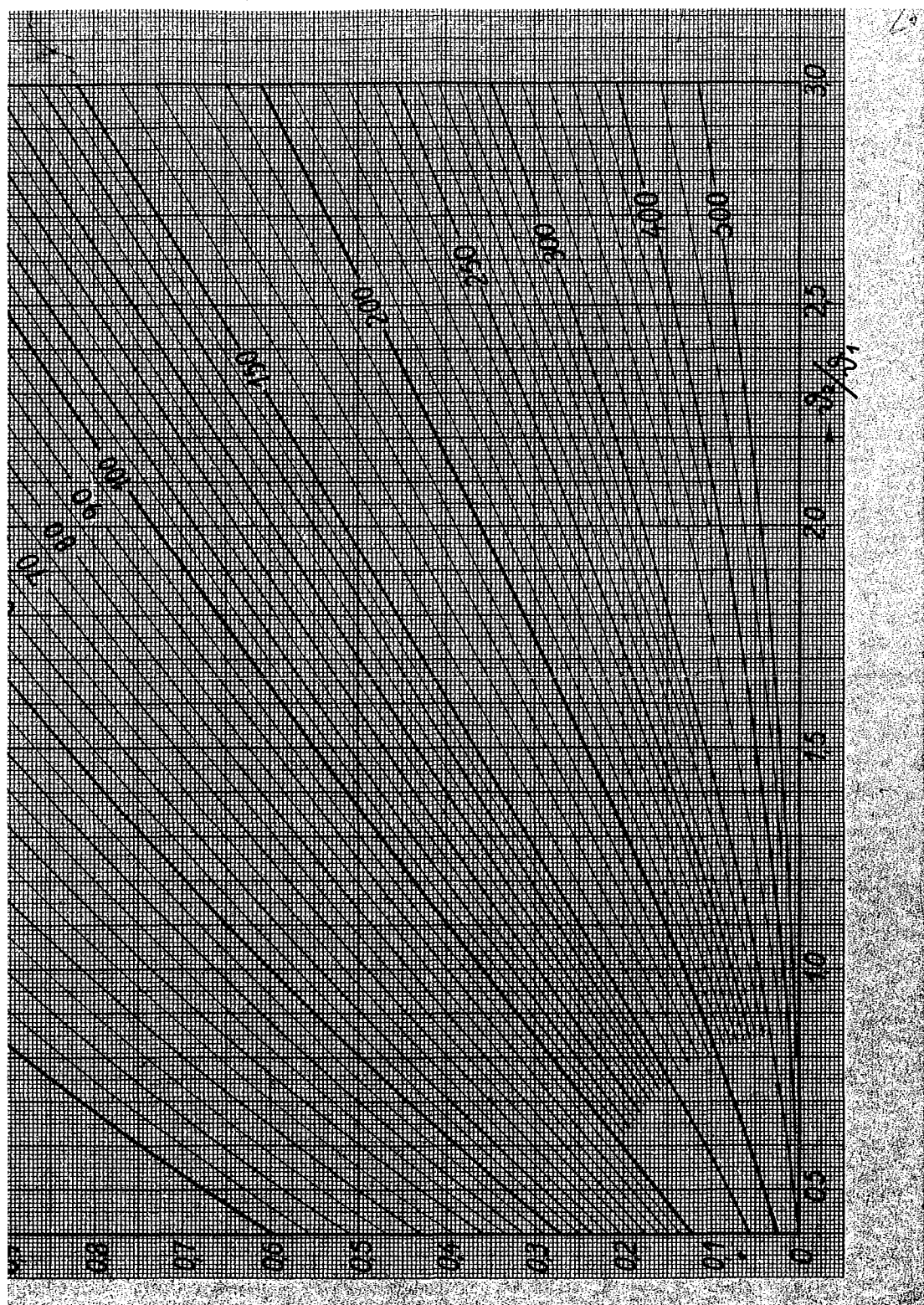
Bild 10 bis 14. Kurvenblätter zur Bestimmung des Formparameters η zu einem durch Geradenstücke angenäherten Verlauf von θ (s) (Index 1 = Anfang, Index 2 = Ende eines geradlinigen Abschnittes Δs) nach Gl. (37a) und (37b).

19
18
17
16
15
14
13
12
11
10

D_1
↑

Bild 10

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$
10
20
30
40
50



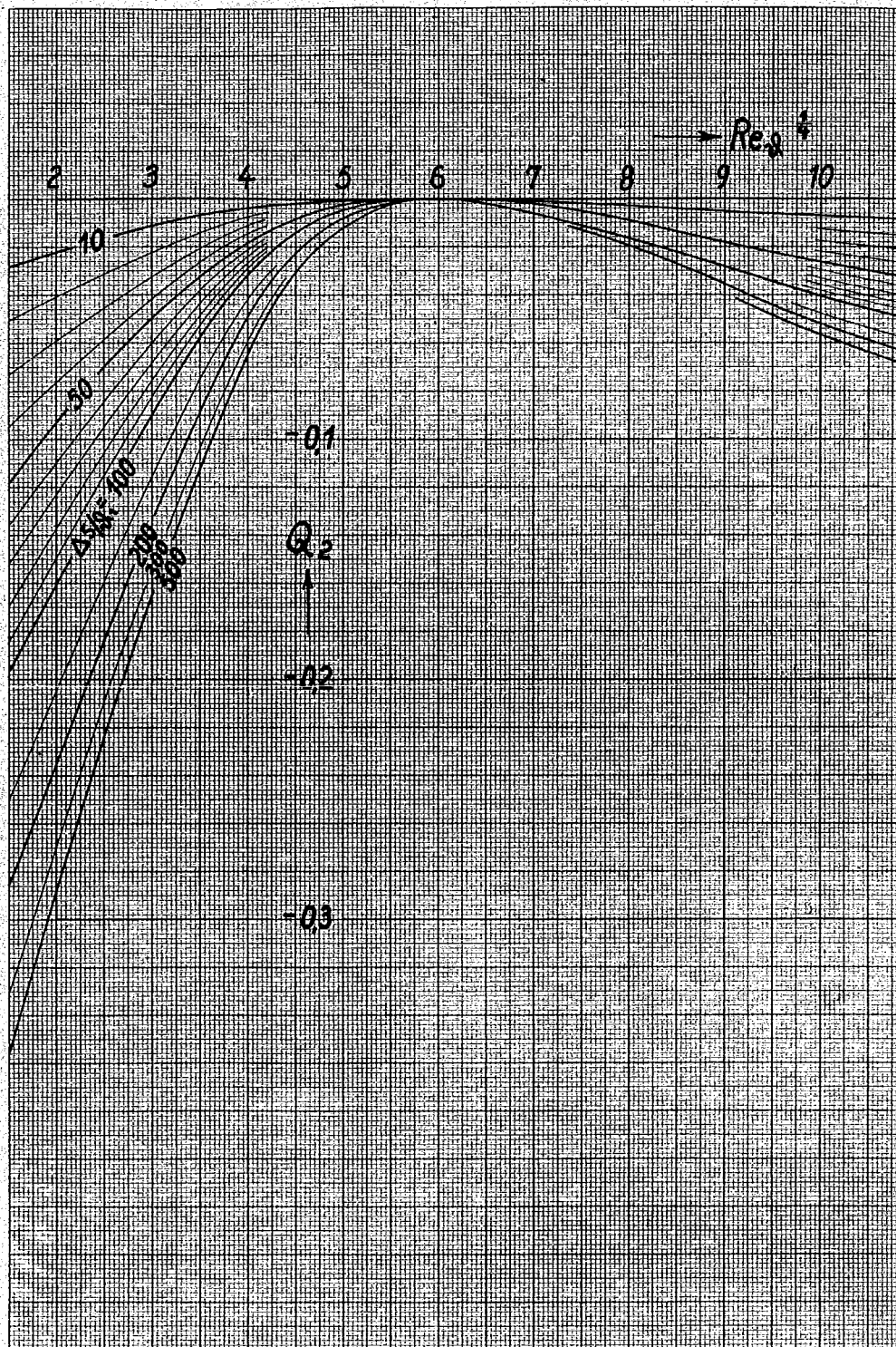


Bild 30. Zur Berechnung des Indifferenzpunktes
nach Schlichting

